Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 5.5

1. 2. Addiert man in der Gleichung $P+\vec{v}=Q+\vec{v}$ auf beiden Seiten $-\vec{v}$, so ergibt sich nach Def. 5.10 (iii): $P+\vec{o}=Q+\vec{o}$. Wegen (i) folgt $P=Q$.

3. Durch Addition von $-\vec{v}$ auf beiden Seiten der Gleichung $P+\vec{v}=Q$ ergibt sich $P+\vec{o}=Q+(-\vec{v})$. Wegen Definition 5.10 (i) entspricht dies der Behauptung $P=Q+(-\vec{v})$.

5. Wegen 4. ist $\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{P_1P_3}$. Durch erneute Anwendung von 4. ergibt sich $\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}=\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{P_1P_4}$. Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen; wir erhalten $\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\ldots+\overrightarrow{P_{k-2}P_{k-1}}=\overrightarrow{P_1P_{k-1}}$ und daraus schließlich $\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\ldots+\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=\overrightarrow{P_1P_{k-1}}+\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=\overrightarrow{P_1P_k}$.

6. Nach Definition 5.10 (ii) und der letzten Bemerkung dazu (siehe S. 203) existieren eindeutig bestimmte Vektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{RP}$ mit $P+\overrightarrow{PR}=R$ und $R+\overrightarrow{RP}=P$. Durch Einsetzen folgt daraus $(P+\overrightarrow{PR})+\overrightarrow{RP}=P$ und wegen Definition 5.10 (iii): $P+(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP})=P$. Nach Definition 5.10 (i) ist $P+\vec{o}=P$; wegen der Eindeutigkeitsaussage Satz 5.22, 1 folgt die Behauptung $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP}=\vec{o}$, die wegen des Vektorraumaxioms A4 (siehe S. 168) und der Eindeutigkeitsaussage 4 in Satz 3.10 (siehe S. 111) gleichbedeutend mit $\overrightarrow{PR}=-\overrightarrow{RP}$ ist.

2. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-\frac{5}{2}$; d. h. $P\left(2;-\frac{5}{2}\right)_K$

3. $P\left(1;\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)_K$, $Q\left(-2;-\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)_K$

4. Umformung der Gleichung der Parabel mittels quadratischer Ergänzung ergibt $y=\frac{1}{2}(x+4)^2+3$. Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Koordinatenursprung des „neuen“ Koordinatensystems: $O=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$. Die Gleichung der Parabel in Koordinaten x', y' bezüglich des Koordinatensystems $K_0'=\{O;\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$ ist $y'=\frac{1}{2}x'^2$. Man setzt $\vec{b}_1=\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2=\frac{1}{2}\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (siehe die Überlegungen in dem Beispiel 5.34 auf S. 207). Bezüglich des Koordinatensystems $K=\{O;\vec{b}_1;\vec{b}_2\}$ hat die Parabel die Gleichung $\lambda_2=\lambda_1^2$.

5. Bezüglich des Koordinatensystems $K=\{O;\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$ hat die Parabel die Gleichung $y'=4\,x'^2$, ihr Scheitelpunkt ist mit dem Koordinatenursprung O des Koordinatensystems K identisch. Daher ist $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Durch Einsetzen dieser Beziehungen für x' und y' ergibt sich $y-5=4\,(x+2)^2$ bzw. $y=4\,(x+2)^2+5$ bzw. $y=4\,x^2+16\,x+21$.

6. Es sei $N=\{P\,|\,P=P_0+\vec{u};\ \vec{u}\in U\}$, $Q\in N$ und $M=\{P\,|\,P=Q+\vec{v};\ \vec{v}\in U\}$. Es ist zu zeigen, dass für beliebige Punkte P gilt: $P\in N\Leftrightarrow P\in M$.

$\Rightarrow$ Ist P ein beliebiger Punkt von N, so existiert $\vec{u}\in U$ mit $P=P_0+\vec{u}$ und wegen $Q\in N$ existiert $\vec{w}\in U$ mit $Q=P_0+\vec{w}$. Dann gilt

$$P=P_0+\vec{w}-\vec{w}+\vec{u}=Q-\vec{w}+\vec{u}.$$

Also ist $P = Q+\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{u}-\vec{w}$. Nach der Definition des Begriffs „linearer Unterraum“ ist $\vec{v} \in U$ und somit $P \in M$.

$\Leftarrow$ Ist $P \in M$, so existiert $\vec{v} \in U$ mit $P = Q + \vec{v}$. Wegen $Q \in N$ existiert wiederum $\vec{w} \in U$ mit $Q = P_0 + \vec{w}$ bzw. $P_0 = Q - \vec{w}$. Es gilt

$$P = Q - \vec{w} + \vec{w} + \vec{v} = P_0 + \vec{w} + \vec{v}.$$

Nach der Definition des Begriffs „linearer Unterraum“ ist $\vec{w}+\vec{v} \in U$ und somit $P \in N$.

7. Es sei $N = \{P \mid P = P_0 + \vec{u};\ \vec{u} \in U\}$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes A mit dem zugehörigen linearen Unterraum U. Wir stellen zunächst fest, dass die Verknüpfung $+\colon A \times V \to A$ auf N abgeschlossen ist, d. h. dass für einen beliebigen Punkt $P \in N$ und einen beliebigen Vektor $\vec{v} \in U$ der Punkt $Q = P + \vec{v}$ zu N gehört. Ist $P \in N$, so existiert definitionsgemäß $\vec{u} \in U$ mit $P = P_0 + \vec{u}$. Dann ist $Q = P_0 + \vec{u} + \vec{v}$. Nach der Definition des Begriffs linearer Unterraum ist $\vec{u} + \vec{v} \in U$ und daher $Q \in N$. Es bleibt zu zeigen, dass N die Eigenschaften (i)-(iii) der Definition 5.10 erfüllt.

(i) Diese Bedingung ist dadurch erfüllt, dass N eine Teilmenge eines affinen Punktraumes A ist und definitionsgemäß für alle $P \in A$ gilt $P + \vec{o} = P$.

(ii) Für beliebige $P, Q \in N$ existieren $\vec{u}, \vec{w} \in U$ mit $P = P_0 + \vec{u}$, $Q = P_0 + \vec{w}$. Wir setzen $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$, dann ist $\vec{v} \in U$ und $Q = P - \vec{u} + \vec{w} = P + \vec{v}$. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass N eine Teilmenge eines affinen Punktraumes A ist, in der die Eindeutigkeit des Vektor $\vec{v} \in V$ mit $Q = P + \vec{v}$ definitionsgemäß gegeben ist.

(iii) Die Gültigkeit der Rechenregel $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$ in N folgt aus ihrer Gültigkeit in A (da $N \subseteq A$).

8. Die zugehörigen linearen Unterräume sind die linearen Hüllen von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$, also $U_1 = \langle \vec{a} \rangle$ und $U_2 = \langle \vec{b} \rangle$. Es bestehen folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von g_1 und g_2:

- Die beiden Geraden sind identisch; dann ist $g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$, und für die Dimension der Schnittmenge gilt $\dim(g_1 \cap g_2) = 1$. Auch die zugehörigen linearen Unterräume sind identisch, somit gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.
- g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt, d. h. $\dim(g_1 \cap g_2) = 0$. Die Schnittmenge der linearen Unterräume U_1 und U_2 enthält nur den Nullvektor, also $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$.
- Falls g_1 und g_2 parallel sind, ist ihr Durchschnitt die leere Menge, besitzt also keine Dimension. Die zugehörigen linearen Unterräume sind hingegen identisch, also ist $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.
- Falls g_1 und g_2 windschief sind, ist ihr Durchschnitt ebenfalls die leere Menge, besitzt also keine Dimension. Die Schnittmenge der linearen Unterräume U_1 und U_2 enthält nur den Nullvektor, also $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$.

9. Es können folgende Fälle auftreten:

- $g \subset \varepsilon$; in diesem Falle ist $U_g \subseteq U_\varepsilon$. Es gilt also $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$ und $\dim A(g \cup \varepsilon) = \dim(U_\varepsilon + U_g) = 2$. Da außerdem (wie auch in den beiden anderen Fällen) $\dim g = 1$ und $\dim \varepsilon = 2$ ist, gilt
$\dim \varepsilon + \dim g = \dim A(g \cup \varepsilon) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g)$.
- $g \cap \varepsilon = \{\}$, d. h. g und ε sind parallel; in diesem Falle ist ebenfalls $U_g \subseteq U_\varepsilon$, also $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$ und $\dim(U_\varepsilon + U_g) = 2$. Der kleinste affine Unterraum, der g und ε enthält, ist jedoch der gesamte Raum $\mathbb{R}^3$, es ist also $\dim A(g \cup \varepsilon) = 3$. Somit gilt $\dim A(g \cup \varepsilon) = \dim(U_\varepsilon + U_g) + 1$ und $\dim \varepsilon + \dim g = \dim A(g \cup \varepsilon) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g) - 1$.
- g und ε schneiden sich in genau einem Punkt S: $g \cap \varepsilon = \{S\}$. Hierbei haben U_g und U_ε nur den Nullvektor gemeinsam, d. h. $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 0$. Da die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in diesem Fall linear unabhängig sein müssen, ist $\dim(U_\varepsilon + U_g) = 3$ und außerdem $\dim A(g \cup \varepsilon) = 3$.
Somit gilt $\dim A(g \cup \varepsilon) = \dim(U_\varepsilon + U_g)$ und
$\dim \varepsilon + \dim g = \dim A(g \cup \varepsilon) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g)$.

10. Es gilt $2 \leq \dim A(\varepsilon \cup g) \leq 4$, da g und ε innerhalb von A liegen und ihre affine Hülle daher maximal A selbst sein kann, zugleich aber mindestens die Ebene ε enthält. Wir untersuchen für $\varepsilon \cap g = \{\}$ und $\varepsilon \cap g \neq \{\}$ die möglichen Fälle $\dim A(\varepsilon \cup g) = 2, 3, 4$. Es seien U_ε und U_g die zu g bzw. ε gehörenden linearen Unterräume.

- ε und g besitzen keinen Schnittpunkt, d. h. $\varepsilon \cap g = \{\}$.
In diesem Falle gilt wegen $\dim \varepsilon = 2$ und $\dim g = 1$ nach Satz 5.28 (ii):
$3 = \dim A(\varepsilon \cup g) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g) - 1 \Rightarrow \dim A(\varepsilon \cup g) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 4$.

$\dim A(\varepsilon \cup g) = 2$.	In diesem Falle müsste $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 2$ sein, was wegen $\dim U_g = 1$ *nicht möglich* ist.
$\dim A(\varepsilon \cup g) = 3$.	Es gilt $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$; g ist *parallel* zu ε.
$\dim A(\varepsilon \cup g) = 4$.	Es gilt $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 0$. Die Gerade g und die Ebene ε haben in diesem Falle keine gemeinsame Richtung und sind, da sie auch keinen gemeinsamen Punkt haben, *windschief*.

- ε und g besitzen mindestens einen gemeinsamen Punkt, d. h. $\varepsilon \cap g \neq \{\}$.
In diesem Falle gilt nach Satz 5.28 (i): $\dim A(\varepsilon \cup g) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 3$.

$\dim A(\varepsilon \cup g) = 2$.	In diesem Falle ist $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$, *$g$ liegt ganz in ε.*
$\dim A(\varepsilon \cup g) = 3$.	Es gilt $\dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 0$. $U_\varepsilon \cap U_g$ besteht nur aus dem Nullvektor. Die Ebene ε und die Gerade g haben *genau einen gemeinsamen Punkt.*
$\dim A(\varepsilon \cup g) = 4$.	Dies ist wegen $\dim A(\varepsilon \cup g) + \dim(U_\varepsilon \cap U_g) = 3$ *nicht möglich.*

11. Für jeden Punkt $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N$ muss die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. das LGS} \quad \begin{array}{rcrcl} 3\,\lambda & + & 4\,\mu & = & x_1 - 2 \\ 2\,\lambda & + & 5\,\mu & = & x_2 - 1 \\ -\lambda & + & 7\,\mu & = & x_3 - 3 \\ & - & 2\,\mu & = & x_4 - 4 \end{array}$$

erfüllt sein. Dieses LGS wird in zwei Gleichungen umgeformt, in denen nur noch x_1, x_2, x_3, x_4 auftreten. Unter Verwendung der letzten und der vorletzten Gleichung lassen sich λ und μ durch x_3, x_4 ausdrücken:

$$\lambda = -x_3 - \tfrac{7}{2}\,x_4 + 17, \quad \mu = -\tfrac{1}{2}\,x_4 + 2$$

Durch Einsetzen in die ersten beiden Gleichungen des LGS nehmen diese folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +\,3\,x_3 + \tfrac{25}{2}\,x_4 & = & 61 \\ & x_2 & +\,2\,x_3 + \tfrac{19}{2}\,x_4 & = & 45. \end{array}$$

Der gegebene affine Unterraum ist die Lösungsmenge dieses LGS.