Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 5.6

1. Es ist zu zeigen, dass B die Bedingungen der Definition 5.15 erfüllt. Es gilt für beliebige $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_w\\y_w\end{pmatrix}$:

B1.
$$\begin{aligned}B(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) &= (x_u+x_v)\,x_w+(x_u+x_v)\,y_w+(y_u+y_v)\,x_w+2\,(y_u+y_v)\,y_w\\ &= x_u\,x_w+x_u\,y_w+y_u\,x_w+2\,y_u\,y_w\\ &\quad +x_v\,x_w+x_v\,y_w+y_v\,x_w+2\,y_v\,y_w\\ &= B(\vec{u},\vec{w})+B(\vec{v},\vec{w})\\ B(\lambda\vec{u},\vec{v}) &= \lambda x_u\,x_v+\lambda x_u\,y_v+\lambda y_u\,x_v+2\,\lambda y_u\,y_v\\ &= \lambda\,(x_u\,x_v+x_u\,y_v+y_u\,x_v+2\,y_u\,y_v)=\lambda\,B(\vec{u},\vec{v})\end{aligned}$$

B2.
$$\begin{aligned}B(\vec{u},\vec{v}) &= x_u\,x_v+x_u\,y_v+y_u\,x_v+2\,y_u\,y_v\\ &= x_v\,x_u+y_v\,x_u+x_v\,y_u+2\,y_v\,y_u \;=\; B(\vec{v},\vec{u})\end{aligned}$$

B3.
$$\begin{aligned}B(\vec{u},\vec{u}) &= x_u\,x_u+x_u\,y_u+y_u\,x_u+2\,y_u\,y_u \;=\; x_u^2+2\,x_u\,y_u+2\,y_u^2\\ &= (x_u+y_u)^2+y_u^2\end{aligned}$$

Da $B(\vec{u},\vec{u})$ die Summe zweier Quadrate reeller Zahlen ist, gilt $B(\vec{u},\vec{u})\geq 0$ für beliebige $\vec{u}$. Damit $B(\vec{u},\vec{u})=0$ ist, müssen (x_u+y_u) sowie y_u und damit auch x_u Null sein. Somit gilt $B(\vec{u},\vec{u})=0$ nur, wenn $\vec{u}$ der Nullvektor ist.

Durch B ist somit eine positiv definite symmetrische Bilinearform gegeben, mit der $\mathbb{R}^2$ zu einem euklidischen Vektorraum wird.

2. Nach Definition 5.15 B1 a gilt $B(\vec{u},\,\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) \;=\; B(\vec{u},\lambda\vec{v})+B(\vec{u},\mu\vec{w})$ (siehe auch die erste Bemerkung zu Definition 5.15). Nach Definition 5.15 B1 b ist $B(\vec{u},\lambda\vec{v})=\lambda\,B(\vec{u},\vec{v})$ und $B(\vec{u},\mu\vec{w})=\mu\,B(\vec{u},\vec{w})$, also

$$B(\vec{u},\,\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) \;=\; B(\vec{u},\lambda\vec{v})+B(\vec{u},\mu\vec{w}) \;=\; \lambda\,B(\vec{u},\vec{v})+\mu\,B(\vec{u},\vec{w}).$$

3. Die Skalarprodukte $\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j$ der Basisvektoren sind:

$\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1=157$, $\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2=282$, $\vec{b}_3\cdot\vec{b}_3=45$,
$\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2=\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1=146$, $\vec{b}_1\cdot\vec{b}_3=\vec{b}_3\cdot\vec{b}_1=-32$, $\vec{b}_2\cdot\vec{b}_3=\vec{b}_3\cdot\vec{b}_2=-33$.

Wir berechnen nun mithilfe der Gleichung (5.1) das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}$ mit den Koordinaten $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{4}{3}$, $\lambda_3=-\frac{2}{3}$ und $\vec{v}$ mit $\mu_1=-2$, $\mu_2=-\frac{7}{3}$, $\mu_3=\frac{2}{3}$. Durch Einsetzen in (5.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\lambda_i\mu_j\;\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j\\ &= \lambda_1\mu_1\cdot\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1+\lambda_1\mu_2\cdot\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2+\lambda_1\mu_3\cdot\vec{b}_1\cdot\vec{b}_3+\lambda_2\mu_1\cdot\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1+\lambda_2\mu_2\cdot\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2\\ &\quad +\lambda_2\mu_3\cdot\vec{b}_2\cdot\vec{b}_3+\lambda_3\mu_1\cdot\vec{b}_3\cdot\vec{b}_1+\lambda_3\mu_2\cdot\vec{b}_3\cdot\vec{b}_2+\lambda_3\mu_3\cdot\vec{b}_3\cdot\vec{b}_3\\ &= 1\cdot(-2)\cdot 157+1\cdot(-\tfrac{7}{3})\cdot 146+1\cdot\tfrac{2}{3}\cdot(-32)+\tfrac{4}{3}\cdot(-2)\cdot 146+\tfrac{4}{3}\cdot(-\tfrac{7}{3})\cdot 282\\ &\quad +\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot(-33)-\tfrac{2}{3}\cdot(-2)\cdot(-32)-\tfrac{2}{3}\cdot(-\tfrac{7}{3})\cdot(-33)-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 45\\ &= -2086\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Die gegebenen Vektoren sind (wie man anhand ihrer Koordinaten bezüglich der Basis B ausrechnet) $\vec{u}=\begin{pmatrix}-9\\8\\32\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}14\\-17\\-57\end{pmatrix}$. Berechnet man deren Skalarprodukt direkt, so erhält man ebenfalls $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2086$.

4. Ist $\vec{u}$ der Nullvektor, so gilt die Behauptung wegen $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ und $|\vec{v}| = 0$ trivialerweise. Anderenfalls existiert wegen der linearen Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine reelle Zahl λ mit $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$. Damit ist

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\lambda\,\vec{u}\cdot\vec{u}\cdot\lambda\,\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{u}\cdot\lambda\,\vec{u}\cdot\lambda\,\vec{u} = |\vec{u}|^2\cdot|\lambda\,\vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2,$$

also $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

5. Nach der Dreiecksungleichung ist $|\lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}\,| \le |\lambda\,\vec{u}| + |\mu\,\vec{v}|$. Außerdem ist $|\lambda\,\vec{u}| = \sqrt{\lambda\,\vec{u}\cdot\lambda\,\vec{u}} = \sqrt{\lambda^2\,\vec{u}\cdot\vec{u}} = |\lambda||\vec{u}|$ und analog $|\lambda\,\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$. Also gilt $|\lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}\,| \le |\lambda||\vec{u}| + |\mu||\vec{v}|$.

6. Als Basis des Vektorraumes der magischen 3×3-Quadrate wurde in dem Beispiel 5.29 $B = \{\vec{b}_1;\vec{b}_2;\vec{b}_3\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\0\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ ermittelt. An dieses Basis führen wir das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren durch (vgl. Beispiel 5.50) und konstruieren eine Orthonormalbasis $B^0 = \{\vec{b}_1^{\,0};\vec{b}_2^{\,0};\vec{b}_3^{\,0}\}$.

Schritt 1:
Den ersten Basisvektor $\vec{b}_1^{\,0}$ erhalten wir durch Normierung von $\vec{b}_1$:

$$\vec{b}_1^{\,0} = \frac{1}{|\vec{b}_1|}\,\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Schritt 2:
Der Basisvektor $\vec{b}_2^{\,0}$ soll in der linearen Hülle $\langle\vec{b}_1,\vec{b}_2\rangle$ liegen und zu $\vec{b}_1^{\,0}$ bzw. zu $\vec{b}_1$ orthogonal sein, d. h. $\vec{b}_2^{\,0} = \lambda\,\vec{b}_1 + \mu\,\vec{b}_2$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$ und $\vec{b}_2^{\,0}\cdot\vec{b}_1 = 0$.
Durch Berechnung von $\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1$ erhält man $\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1 = 0$ und stellt somit fest, dass $\vec{b}_2$ die Orthogonalitätsbedingung bereits erfüllt. Somit ergibt sich der Basisvektor $\vec{b}_2^{\,0}$ einfach durch Normierung von $\vec{b}_2$:

$$\vec{b}_2^{\,0} = \frac{1}{|\vec{b}_2|}\,\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\0\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\0\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Schritt 3:
Der Basisvektor $\vec{b}_3^{\,0}$ soll zu der linearen Hülle $\langle \vec{b}_1^{\,0}, \vec{b}_2^{\,0}, \vec{b}_3 \rangle$ gehören und zu den Vektoren $\vec{b}_1^{\,0}$ und $\vec{b}_2^{\,0}$ orthogonal sein, d. h. $\vec{b}_3^{\,0} = \lambda\,\vec{b}_1^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3$ $(\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R})$ sowie $\vec{b}_3^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} = 0$ und $\vec{b}_3^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} = 0$. Zu bestimmen sind Koeffizienten λ, μ, ν, welche diese Bedingungen erfüllen. Dazu setzt man $\vec{b}_3^{\,0} = \lambda\,\vec{b}_1^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3$ in die beiden Orthogonalitätsbedingungen ein:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\lambda\,\vec{b}_1^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3\right) \cdot \vec{b}_1^{\,0} = \lambda\,\vec{b}_1^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1^{\,0} = \lambda - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\nu \\
0 &= \left(\lambda\,\vec{b}_1^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3\right) \cdot \vec{b}_2^{\,0} = \lambda\,\vec{b}_1^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} + \mu\,\vec{b}_2^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} + \nu\,\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2^{\,0} = \mu - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\,\nu\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir ein LGS, das wir nach λ, μ, ν lösen. Wir erhalten eine einparametrige Lösungsmenge: $\lambda = t$, $\mu = t$, $\nu = \frac{\sqrt{6}}{2}\,t$. Setzen wir $t = 1$, also $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = \frac{\sqrt{6}}{2}$, so erhalten wir einen Vektor $\vec{b}_3'$, der die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt und in der linearen Hülle $\langle \vec{b}_1^{\,0}, \vec{b}_2^{\,0}, \vec{b}_3 \rangle$ liegt:

$$\vec{b}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Normieren des Vektors $\vec{b}_3'$ erhalten wir $\vec{b}_3^{\,0} = \dfrac{1}{|\vec{b}_3'|}\vec{b}_3' = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Man prüft leicht nach, dass $B^0 = \{\vec{b}_1^{\,0}; \vec{b}_2^{\,0}; \vec{b}_3^{\,0}\}$ eine Orthonormalbasis ist:

$$\begin{aligned}
&\vec{b}_1^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} = 1, && \vec{b}_2^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} = 1, && \vec{b}_3^{\,0} \cdot \vec{b}_3^{\,0} = 1, \\
&\vec{b}_1^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} = \vec{b}_2^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} = 0, && \vec{b}_1^{\,0} \cdot \vec{b}_3^{\,0} = \vec{b}_3^{\,0} \cdot \vec{b}_1^{\,0} = 0, && \vec{b}_2^{\,0} \cdot \vec{b}_3^{\,0} = \vec{b}_3^{\,0} \cdot \vec{b}_2^{\,0} = 0.
\end{aligned}$$

In der Matrizenscheibweise ist

$$B^0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$