Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 6.1

1. $\operatorname{rg}\mathbf{A} = 3,\ \ \operatorname{rg}\mathbf{B} = 2,\ \ \operatorname{rg}\mathbf{C} = 3$

2. • Der Zeilen- und der Spaltenrang von **A** sind jeweils 3.
Basis des von den Zeilenvektoren von **A** erzeugten linearen Unterraumes:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\}.$$

Basis des von den Spaltenvektoren von **A** erzeugten linearen Unterraumes:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

• Der Zeilen- und der Spaltenrang von **B** sind jeweils 3. Die drei Spaltenvektoren von **B** sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis des von ihnen erzeugten linearen Unterraumes von $\mathbb{R}^4$. Der von den Zeilenvektoren von **B** erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist $\mathbb{R}^3$ selbst; somit ist jede Basis von $\mathbb{R}^3$ auch eine Basis des von den Spaltenvektoren von **B** erzeugten linearen Unterraumes.

• Die Matrix **C** hat den „vollen Rang“, d. h. ihr Spalten- und ihr Zeilenrang sind jeweils gleich der Anzahl der Zeilen und der Anzahl der Spalten der Matrix. Die von den Spalten- und von den Zeilenvektoren dieser Matrix erzeugten linearen Unterräume sind $\mathbb{R}^4$ selbst bzw. der Raum aller transponiert geschriebenen Vektoren von $\mathbb{R}^4$. Somit ist jede Basis von $\mathbb{R}^4$ auch eine Basis des von den Spaltenvektoren von **C** erzeugten linearen Unterraumes und (transponiert geschrieben) eine Basis des von den Zeilenvektoren von **C** erzeugten linearen Unterraumes.

3. S2. Es sei eine beliebige Teilmenge von k Spaltenvektoren einer $m\times n$-Matrix **A** gegeben. Diese können wir so umbenennen bzw. mit anderen Spaltenvektoren vertauschen, dass sie die ersten k Spaltenvektoren der gegebenen Matrix bilden und daher mit $\vec{a}_{\mathrm{S}1}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}k}$ bezeichnen. Eine Menge $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}k}\}$ von Spaltenvektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1\vec{a}_{\mathrm{S}1} + \lambda_2\vec{a}_{\mathrm{S}2} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_{\mathrm{S}k} = \vec{o}$ folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Multipliziert man eine Spalte von **A** mit einer reellen Zahl $\mu \neq 0$, so bleibt die Teilmenge $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}k}\}$ davon entweder unberührt (falls die Multiplikation an einem Spaltenvektor vorgenommen wird, der nicht zu dieser Teilmenge gehört) oder einer ihrer Vektoren wird mit μ multipliziert; o. B. d. A. sei dies der Vektor $\vec{a}_{\mathrm{S}1}$. Offensichtlich folgt aus

$$\lambda_1\vec{a}_{\mathrm{S}1} + \lambda_2\vec{a}_{\mathrm{S}2} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_{\mathrm{S}k} = \vec{o}$$

genau dann $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, wenn aus

$$\lambda_1(\mu\vec{a}_{\mathrm{S}1}) + \lambda_2\vec{a}_{\mathrm{S}2} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_{\mathrm{S}k} = \vec{o}$$

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ folgt (wegen $\mu \neq 0$). Somit bleibt die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit einer beliebigen Menge von Spaltenvektoren und damit nach Definition 6.4 der Spaltenrang der Matrix $\mathbf{A}$ bei Spaltenumformungen des Typs S2 erhalten.

S3. Die bei S2 praktizierte Vorgehensweise lässt sich nicht unmittelbar auf die Addition von Spalten zu anderen Spalten übertragen, denn es kann durchaus sein, dass zu einem Vektor einer Teilmenge $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}k}\}$ ein Vektor addiert wird, der nicht zu dieser Teilmenge gehört.

Wir greifen daher auf die Tatsache zurück, dass die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und damit ihr Spaltenrang gleich der Dimension des von allen Spaltenvektoren erzeugten Unterraumes (also der linearen Hülle aller Spaltenvektoren) ist, vgl. die Folgerung zu der Definition 6.4 auf S. 230.

Wir weisen nach, dass die lineare Hülle der Menge $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}n}\}$ aller Spaltenvektoren gleich der linearen Hülle der Vektormenge ist, die daraus entsteht, indem zu einem Spaltenvektor ein anderer Spaltenvektor addiert wird. Da wir die Spaltenvektoren beliebig umbenennen bzw. vertauschen dürfen, gehen wir o. B. d. A. davon aus, dass $\vec{a}_{\mathrm{S}1}$ durch $\vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}$ ersetzt wird und zeigen, dass

$$\langle \vec{a}_{\mathrm{S}1}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle = \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle$$

ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle \Leftrightarrow \vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle.$$

Es gilt $\vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle$ genau dann, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_{\mathrm{S}1} + \lambda_2 \vec{a}_{\mathrm{S}2} + \ldots + \lambda_n \vec{a}_{\mathrm{S}n} = \lambda_1 (\vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}) + (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{a}_{\mathrm{S}2} + \ldots + \lambda_n \vec{a}_{\mathrm{S}n}$$

existieren. Damit ist auch $\vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle$.

Umgekehrt lässt sich ebenso zeigen, dass aus $\vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle$ folgt $\vec{x} \in \langle \vec{a}_{\mathrm{S}1}, \vec{a}_{\mathrm{S}2}, \ldots, \vec{a}_{\mathrm{S}n} \rangle$. Damit erzeugen die Vektormengen $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}n}\}$ und $\{\vec{a}_{\mathrm{S}1} + \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \vec{a}_{\mathrm{S}2}; \ldots; \vec{a}_{\mathrm{S}n}\}$ denselben linearen Unterraum; die Ersetzung eines Spaltenvektors durch die Summe dieses mit einem anderen Spaltenvektor ändert den Spaltenrang also nicht.

4. Da nur quadratische Matrizen reguläre Matrizen sein können, kommen von den in den Aufgaben 1 und 2 gegebenen Matrizen nur die Matrix $\mathbf{A}$ aus Aufgabe 1 und die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ aus Aufgabe 2 in Frage. Bei allen drei dieser Matrizen handelt es sich um 4×4-Matrizen. Nur die Matrix $\mathbf{C}$ aus Aufgabe 2 hat den Rang 4 und ist somit regulär.