Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 6.2

1. • $\mathbf{A}_{\mathrm{Z}\to\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{R}\to\mathrm{Z}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

• $\vec{z} = \mathbf{A}_{\mathrm{Z}\to\mathrm{E}} \circ \vec{e} = \begin{pmatrix} 390 \\ 415 \\ 65 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \mathbf{B}_{\mathrm{R}\to\mathrm{Z}} \circ \vec{z} = \begin{pmatrix} 2065 \\ 1975 \\ 2090 \\ 3780 \end{pmatrix}$

• $\mathbf{C}_{\mathrm{R}\to\mathrm{E}} = \mathbf{B}_{\mathrm{R}\to\mathrm{Z}} \circ \mathbf{A}_{\mathrm{Z}\to\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 11 & 29 & 33 \\ 9 & 24 & 34 \\ 10 & 33 & 32 \\ 40 & 53 & 53 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \mathbf{C}_{\mathrm{R}\to\mathrm{E}} \circ \vec{e} = \begin{pmatrix} 2065 \\ 1975 \\ 2090 \\ 3780 \end{pmatrix}$

2. • Um das Produkt $\mathbf{C}\circ\mathbf{A}$ zu berechnen, müsste die Zeilenlänge (bzw. die Spaltenanzahl) von $\mathbf{C}$ mit der Spaltenlänge (die gleich der Zeilenanzahl ist) von $\mathbf{A}$ übereinstimmen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Aus demselben Grunde existiert $\mathbf{C}\circ\mathbf{B}$ nicht.

• $\mathbf{A}\circ\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 20 & -13 & 11 \\ 8 & -13 & -4 \\ -21 & -63 & 40 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\circ\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 26 & 29 & -34 \\ 17 & -10 & -30 \\ 0 & 12 & 31 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}\circ\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & -59 & 35 & -65 \\ 7 & 15 & -10 & 37 \\ -6 & -25 & 0 & -15 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\circ\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & -19 & -20 & 71 \\ 2 & -26 & 15 & -30 \\ -48 & -55 & 0 & -105 \end{pmatrix}$,

$(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\circ\mathbf{C} = \mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 13 & -267 & 65 & -137 \\ -20 & -129 & 65 & -191 \\ 141 & -206 & 315 & -390 \end{pmatrix}$

3. a) Ja: $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -22 & 13 \\ 13 & -22 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -22 & 13 \\ 13 & -22 \end{pmatrix}$

b) Ja: $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a\,c-b\,d & a\,d+b\,c \\ -a\,d-b\,c & a\,c-b\,d \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a\,c-b\,d & a\,d+b\,c \\ -a\,d-b\,c & a\,c-b\,d \end{pmatrix}$

4. Es sei $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix. Damit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ gilt, müssen die beiden Produktmatrizen in allen Koeffizienten übereinstimmen:

$$\begin{aligned} 2a + c &= 2a + 3b \\ 2b + d &= a + 4b \\ 3a + 4c &= 2c + 3d \\ 3b + 4d &= c + 4d\,. \end{aligned}$$

Durch Lösen dieses LGS erhält man eine zweiparametrige Lösungsmenge: $a = s - \frac{2}{3}t$, $b = \frac{t}{3}$, $c = t$, $d = s$. Alle Matrizen der Form $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} s-\frac{2}{3}t & \frac{t}{3} \\ t & s \end{pmatrix}$ sind also mit $\mathbf{A}$ vertauschbar.

5. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -9 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\circ\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -6 \\ -59 & 15 & -25 \\ 35 & -10 & 0 \\ -65 & 37 & -15 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B} \circ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & -59 & 35 & -65 \\ 7 & 15 & -10 & 37 \\ -6 & -25 & 0 & -15 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{B} \circ \mathbf{C})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -6 \\ -59 & 15 & -25 \\ 35 & -10 & 0 \\ -65 & 37 & -15 \end{pmatrix}$.

Es gilt also (zumindest bei diesem Beispiel) $(\mathbf{B} \circ \mathbf{C})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \circ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

6. Es ist zu zeigen, dass für beliebige $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = (\lambda \cdot \mathbf{A}) \circ \mathbf{B} = \mathbf{A} \circ (\lambda \cdot \mathbf{B})$.

Es seien $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots m}}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$. Dann gilt

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots n}},$$

$$\lambda \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = \left(\lambda \cdot \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots n}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda\, a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots n}},$$

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots m}}, \quad (\lambda \cdot \mathbf{A}) \circ \mathbf{B} = \left(\sum_{k=1}^{m} (\lambda\, a_{ik})\, b_{kj} \right)_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots n}},$$

$$\lambda \cdot \mathbf{B} = (\lambda \cdot b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}, \quad \mathbf{A} \circ (\lambda \cdot \mathbf{B}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, (\lambda\, b_{kj}) \right)_{\substack{i=1\dots l\\ j=1\dots n}}.$$

Wegen $\lambda\, a_{ik} b_{kj} = (\lambda\, a_{ik})\, b_{kj} = a_{ik}\, (\lambda\, b_{kj})$ gilt die Behauptung.

7. • Die gegebenen Situation wird durch die folgende Tabelle beschrieben.

Ei wird zu	Larve wird zu	Käfer wird zu	alter Käfer wird	
		8	4	Eier
$\frac{1}{4}$				Larven
	$\frac{4}{9}$			Käfer
		$\frac{1}{4}$		alte Käfer

Die zugehörige Populationsmatrix ist $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

• Der Populationsvektor des Anfangsbestandes ist $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(Eier)} \\ \text{(Larven)} \\ \text{(Käfer)} \\ \text{(alte Käfer).} \end{matrix}$

Durch mehrfache Multiplikation des Populationsvektors $\vec{p}_0$ mit der Populationsmatrix ergeben sich die Bestände $\vec{p}_1 = \mathbf{P} \circ \vec{p}_0$, $\vec{p}_2 = \mathbf{P} \circ \vec{p}_1$, $\vec{p}_3 = \mathbf{P} \circ \vec{p}_2$ und $\vec{p}_4 = \mathbf{P} \circ \vec{p}_3$ nach 1, 2, 3 bzw. 4 Monaten (gerundet auf ganze Zahlen):

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 12000 \\ 250 \\ 444 \\ 250 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 4556 \\ 3000 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}, \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1333 \\ 1139 \\ 1333 \\ 28 \end{pmatrix}, \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 10778 \\ 333 \\ 506 \\ 333 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(Eier)} \\ \text{(Larven)} \\ \text{(Käfer)} \\ \text{(alte Käfer).} \end{matrix}$$

• Es ist ein Vektor $\vec{q}$ mit

$$\vec{q} = \mathbf{P} \circ \vec{q}\,, \text{ d. h. } \begin{pmatrix} q_E \\ q_L \\ q_K \\ q_{aK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_E \\ q_L \\ q_K \\ q_{aK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\, q_K + 4\, q_{aK} \\ \frac{1}{4}\, q_E \\ \frac{4}{9}\, q_L \\ \frac{1}{4}\, q_K \end{pmatrix}$$

zu bestimmen (falls ein solcher existiert). Dazu ist folgendes LGS zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} q_E &=& 8\,q_K + 4\,q_{aK} \\ q_L &=& \frac{1}{4}\,q_E \\ q_K &=& \frac{4}{9}\,q_L \\ q_{aK} &=& \frac{1}{4}\,q_K \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rrrrcl} q_E & & -\,8\,q_K & -\,4\,q_{aK} &=& 0 \\ -\frac{1}{4}\,q_E & +\,q_L & & &=& 0 \\ & -\frac{4}{9}\,q_L & +\,q_K & &=& 0 \\ & & -\frac{1}{4}\,q_K & +\,q_{aK} &=& 0. \end{array}$$

Man erhält eine einparametrige Lösungsmenge:
$q_E = 36\,t,\ q_L = 9\,t,\ q_K = 4\,t,\ q_{aK} = t \quad (t \in \mathbb{R})$.

Somit ist z. B. $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 900 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$ ein Vektor mit $\mathbf{P} \circ \vec{q} = \vec{q}$, der eine „stabile Population“ beschreibt. Wir überprüfen dies und erhalten tatsächlich

$$\mathbf{P} \circ \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3600 \\ 900 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 900 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

8. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{36} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} & -\frac{13}{36} \\ -\frac{29}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{9} & \frac{19}{18} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

9. Daraus, dass die beiden Spaltenvektoren linear unabhängig sein müssen, lässt sich die Bedingung $ad \neq bc$ für die Regularität der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ herleiten. Als inverse Matrix berechnet man

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

10. Nach Satz 6.6 gilt für beliebige $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \circ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{\mathrm{T}}$. Insbesondere gilt also für eine reguläre Matrix $\mathbf{A}$ und ihre Inverse:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \circ (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_n^{\mathrm{T}}.$$

Da die Transponierte $\mathbf{E}_n^{\mathrm{T}}$ der Einheitsmatrix gerade $\mathbf{E}_n$ selbst ist, folgt daraus $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \circ (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_n$. Damit ist $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ die Inverse zu $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, es gilt also $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.