Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 6.3

1. 4. Durch Spaltenvertauschung entsteht $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}' &= a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} = a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= -\det \mathbf{A} \end{aligned}$$

5. Für $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist $\det \mathbf{A}' = (\lambda\, a_{11})\, a_{22} - a_{12}\,(\lambda\, a_{21}) = \lambda \det \mathbf{A}$. Dasselbe Ergebnis erhält man bei Vervielfachung der zweiten Spalte.

6. Durch Addieren des λ-fachen der ersten Spalte zur zweiten Spalte entsteht die Matrix $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda a_{21} \end{pmatrix}$. Ihre Determinante ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}' &= a_{11}\,(a_{22}+\lambda\, a_{21}) - (a_{12}+\lambda a_{11})\, a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} + \lambda a_{11}a_{21} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{11}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

2. $\det \mathbf{A} = 367,\ \det \mathbf{B} = -57$

3. Es gibt zwei Möglichkeiten der Beweisführung.

1. Die Matrix $\lambda\cdot\mathbf{A}$ entsteht, indem man zunächst die erste Zeile von $\mathbf{A}$ mit λ multipliziert, es entsteht eine Matrix $\mathbf{A}'$, dann die zweite Zeile von $\mathbf{A}'$ mit λ multipliziert, es entsteht $\mathbf{A}''$, und schließlich die dritte Zeile von $\mathbf{A}''$ mit λ multipliziert.
   Wegen der Eigenschaft 5 in dem Kasten auf S. 252 gilt: $\det \mathbf{A}' = \lambda \det \mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}'' = \lambda \det \mathbf{A}' = \lambda^2 \det \mathbf{A}$ sowie $\det(\lambda\cdot\mathbf{A}) = \lambda \det \mathbf{A}'' = \lambda^3 \det \mathbf{A}$.

2. Nach der Definition 6.9 ist

$$\begin{aligned} \det(\lambda\cdot\mathbf{A}) &= \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \lambda a_{11}\,\lambda a_{22}\,\lambda a_{33} + \lambda a_{12}\,\lambda a_{23}\,\lambda a_{31} + \lambda a_{13}\,\lambda a_{21}\,\lambda a_{32} \\ &\quad -\lambda a_{13}\,\lambda a_{22}\,\lambda a_{31} - \lambda a_{12}\,\lambda a_{21}\,\lambda a_{33} - \lambda a_{11}\,\lambda a_{23}\,\lambda a_{32} \\ &= \lambda^3 \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$