Fachschaft Mathematik
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

Warm-Up

WS 2015/16

Übungsaufgaben
Vollständige Induktion

Aufgabe 1 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1: \; 1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 && \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)^2 && \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Man beweise folgende Formel für $x \neq 1$: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 0: \; x^0 = \frac{x^1 - 1}{x - 1} = 1 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$

Beweis.

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1} \qquad \square$$

Aufgabe 3 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1: \; 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$ ✓

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Beweis.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \qquad \square$$

Aufgabe 4 Man beweise folgende Formel: $\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \geq 2$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 2: \ (1-\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2}$ ✓

Induktionsvoraussetzung $\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Induktionsbehauptung $\prod_{i=2}^{n+1}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{n+1}(1-\frac{1}{i^2}) &= (1-\frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) \\
&= (1-\frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+1}{2n} && \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n} \\
&= \frac{n+2}{2n+2}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5 Man beweise folgende Formel: $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 4 : 4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

Induktionsvoraussetzung $n! > 2^n$

Induktionsbehauptung $(n+1)! > 2^{n+1}$

Beweis.

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

□

Aufgabe 6 Man beweise, dass man jeden glatten Betrag größer 7 so mit Geldscheinen im Wert von 3 und 5 bezahlen kann, dass man kein Wechselgeld erhält.

Lösung: Formale Schreibweise der Aufgabe:

$$\forall x \in \mathbb{N} \text{ mit } x > 7 \; \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : \quad x = 3m + 5n.$$

Induktionsanfang

$$x = 8: \quad 8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5;$$
$$x = 9: \quad 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5; \qquad\qquad x = 10: \quad 10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung Für ein $x > 7$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$: mit $x = 3m + 5n$

Induktionsbehauptung Dann gilt für $x + 3$ dass $m', n' \in \mathbb{N}_0$: mit $x = 3m' + 5n'$

Beweis. Sei $x = 3m + 5n$. Dann gilt für

$$x + 3 \overset{\text{IV}}{=} (3m + 5n) + 3 = 3(m + 1) + 5n$$

In diesem Beweis haben wir also zuerst gezeigt, dass die Behauptung für die ersten drei Zahlen $8, 9, 10$ gilt, und dann gesehen, dass sie falls sie für eine Zahl gilt, auch für die um drei größere Zahl gilt. Somit ist der Beweis erbracht. □

Zusatzaufgabe 1 Man beweise folgende Formel: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1: \quad 1^2 = \frac{3}{3} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

Induktionsbehauptung $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 + (2(i+1)-1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 && \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3} = \frac{\big(n(2n-1)+3(2n+1)\big)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(2n^2+5n+3)(2n+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3} && \square
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 2 Man beweise folgende Formel: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1:\ \ 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4} = 6 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Induktionsbehauptung $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\
&\qquad \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} && \square
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 3 Man beweise folgende Formel: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für alle $n \geq 4$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 4 : 4 \cdot \sqrt{4} = 8 > 6 = 4 + \sqrt{4}$ ✓

Induktionsvoraussetzung $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

Induktionsbehauptung $(n+1)\sqrt{n+1} > n + 1 + \sqrt{n+1}$

Beweis.

$$\begin{aligned}(n+1)\sqrt{n+1} &= n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > n\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > n + 1 + \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

□