



Übungsaufgaben

Vollständige Induktion

Aufgabe 1 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1$: $1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

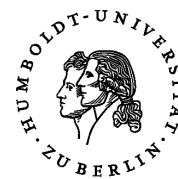
Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Man beweise folgende Formel für $x \neq 1$: $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 0$: $x^0 = \frac{x^1 - 1}{x - 1} = 1 \quad \checkmark$



Warm-Up

WS 2015/16

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} && \square \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Lösung:

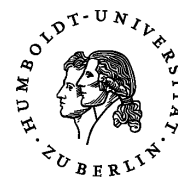
Induktionsanfang $n = 1 : 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} && \square \end{aligned}$$



Warm-Up

WS 2015/16

Aufgabe 4 Man beweise folgende Formel: $\prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \geq 2$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 2 : (1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Induktionsbehauptung $\prod_{i=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$

Beweis.

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{i^2}) &= (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i^2}) \\ &= (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+1}{2n} && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{n+2}{2n+2} \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Man beweise folgende Formel: $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 4 : 4! = 24 > 16 = 2^4 \quad \checkmark$

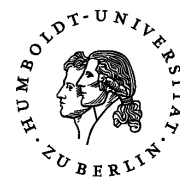
Induktionsvoraussetzung $n! > 2^n$

Induktionsbehauptung $(n+1)! > 2^{n+1}$

Beweis.

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

□



Warm-Up

WS 2015/16

Aufgabe 6 Man beweise, dass man jeden glatten Betrag größer 7 so mit Geldscheinen im Wert von 3 und 5 bezahlen kann, dass man kein Wechselgeld erhält.

Lösung: Formale Schreibweise der Aufgabe:

$$\forall x \in \mathbb{N} \text{ mit } x > 7 \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : x = 3m + 5n.$$

Induktionsanfang

$$x = 8 : 8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5;$$

$$x = 9 : 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5;$$

$$x = 10 : 10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung Für ein $x > 7$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$: mit $x = 3m + 5n$

Induktionsbehauptung Dann gilt für $x + 3$ dass $m', n' \in \mathbb{N}_0$: mit $x = 3m' + 5n'$

Beweis. Sei $x = 3m + 5n$. Dann gilt für

$$x + 3 \stackrel{\text{IV}}{=} (3m + 5n) + 3 = 3(m + 1) + 5n$$

In diesem Beweis haben wir also zuerst gezeigt, dass die Behauptung für die ersten drei Zahlen 8, 9, 10 gilt, und dann gesehen, dass sie falls sie für eine Zahl gilt, auch für die um drei größere Zahl gilt. Somit ist der Beweis erbracht. \square

Zusatzaufgabe 1 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 1 : 1^2 = \frac{3}{3} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}$



Warm-Up

WS 2015/16

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 + (2(i+1)-1)^2 \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} = \frac{(n(2n-1) + 3(2n+1))(2n+1)}{3} \\ &= \frac{(2n^2 + 5n + 3)(2n+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3} \quad \square\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 2 Man beweise folgende Formel: $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Lösung:

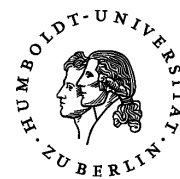
Induktionsanfang $n = 1$: $1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6 \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Induktionsbehauptung $\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ & && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} \quad \square\end{aligned}$$



Warm-Up

WS 2015/16

Zusatzaufgabe 3 Man beweise folgende Formel: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für alle $n \geq 4$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 4 : 4 \cdot \sqrt{4} = 8 > 6 = 4 + \sqrt{4}$ ✓

Induktionsvoraussetzung $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

Induktionsbehauptung $(n + 1)\sqrt{n + 1} > n + 1 + \sqrt{n + 1}$

Beweis.

$$\begin{aligned}(n + 1)\sqrt{n + 1} &= n\sqrt{n + 1} + \sqrt{n + 1} > n\sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} > n + 1 + \sqrt{n + 1}\end{aligned}$$

□