Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2012/2013

Jörg Wolf [1)]

Inhaltsverzeichnis

[1)] JGU Mainz, Institut für Mathematik, FB 08, Staudinger Weg 9, E-Mail: wolfj@uni-mainz.de.

Einführung

Wo kommen PDGl vor ?

- *Naturwissenschaften*:
  - **Physik**: Mechanik, Elektrodynamik/Statik, Quantenphysik, Relativitätstheorie
  - **Chemie**: Reaktionsdynamik
  - **Biologie**: Stoffwechsel, Populationsmodelle, Nervensysteme,
- *Ingenieurwissenschaften*: z.B. Materialwissenschaften, Statik, Strömungslehre,
- *Mathematik*: Differenzialgeometrie, Minimalflächen
- *Wirtschaftswissenschaften*: Finanzmathematik, Stochastische Modelle

Inhalt der Vorlesung:

- Einfache lineare Modelle welche grundlegende Phänomene, die wir im Alltag beobachten: Elektrische Ladungen, Strömungen, Wärmeausbreitung, Schallwellen.
- Grundtypen PDGl: Elliptische; Parabolische; Hyperbolische PDGl.
- Hauptsächlich betrachten wir lineare Differentialgleichungen, einige einfache nichtlineare Modelle.

1 Der Gaußsche Integralsatz

Wir betrachten eine Teilchenbewegung im $\mathbb{R}^3$ und ein Testvolumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, welches durchströmt wird. Wichtig für die Modellbildung ist der Zusammenhang zwischen der Dynamik in Ω und der Gesamtbilanz der Strömung in und aus Ω durch den Rand $\partial\Omega$, unter Einbeziehung der zentralen Erhaltungssätze der Mechanik und Thermodynamik. Ein wichtiges Werkzeug hierfür ist der *Gaußsche Integralsatz.*

Notation: 1. Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ bedeutet $A \subset\subset B$, dass $\overline{A} \subset B$ und $\overline{A}$ kompakt ist. Falls B offen ist, so folgt $\operatorname{dist}(A, \partial B) > 0$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}} = \textit{ Träger von } f.$$

3. Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} C^0(\Omega) &= \textit{ Menge der in } \Omega \textit{ stetigen Funktion,} \\ C^k(\Omega) &= \textit{ Menge der in } \Omega\ k\textit{-mal stetig differenzierbaren Funktionen} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ C^\infty(\Omega) &= \textit{ Menge der in } \Omega \textit{ beliebig oft differenzierbaren Funktionen.} \end{aligned}$$

Ferner setzen wir

$$C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega); \operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega\}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } k = \infty.$$

3. Ist $f \in C^0(\Omega)$, so sagen wir $f \in C^0(\overline{\Omega})$, falls f eine Fortsetzung $\widetilde{f} \in C^0(\overline{\Omega})$ besitzt. Mithilfe dieser Konvention setzen wir für $k \in \mathbb{N}_0$ oder $k = \infty$

$$C^k(\overline{\Omega}) = \Big\{ f \in C^k(\Omega); D^\alpha f \in C^0(\overline{\Omega}) \textit{ für jeden Multi-Index } \alpha \textit{ mit } |\alpha| \le k \Big\}.$$

Räume vektorwertiger Funktionen werden mit $C^k(\Omega;\mathbb{R}^N)$ bzw. mit $C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ $(N \in \mathbb{N})$ bezeichnet.

Wir kommen nun zu der einfachsten Version des Gaußschen Integralsatzes

Satz 1.1 *1. Für jedes Vektorfeld* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *gilt:*

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dx = 0, \tag{1.1}$$

wobei $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

Beweis Sei $\boldsymbol{f} \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\boldsymbol{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit $\boldsymbol{f}$. Dann ist $\boldsymbol{f} \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Offensichtlich existiert ein $R > 0$, so dass $\operatorname{supp}(\boldsymbol{f}) \subset (-R,R)^n$. Dann haben wir unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_n) dt \Bigg) dx_2 \ldots dx_n.$$

Da $f_1(-R,x') = f_1(R,x') = 0$ für jedes $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential-und Integralrechnung

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x') dt = \int\limits_{-R}^{R} \frac{d}{dt} f_1(t,x') dt = 0.$$

Also verschwindet das Integral auf der linken Seite der vorletzten Identität. Analog zeigt man

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = 0, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Dies beweist die Behauptung. ■

Notation Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $x_0' = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n-1})$. Für $r > 0$ bezeichne $B_r'(x_0)$ die $n-1$-dimensionale Kugel

$$\Big\{ y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}; (y_1 - x_{0,1})^2 + \ldots + (y_{n-1} - x_{0,n-1})^2 < r^2 \Big\}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} U_r(x_0) &= B'_r(x'_0) \times (-r, r), \\ U_r^+(x_0) &= B'_r(x'_0) \times (0, r), \quad U_r^-(x_0) \;=\; B'_r(x'_0) \times (-r, 0). \end{aligned}$$

Definition 1.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet mit C^k-Rand*, falls für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Abbildung $f \in C^k(B'_r(x'_0))$ existiert, so dass nach einer eventuellen Umordnung der Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ gilt:

(i) $f(x'_0) = x_{0,n}$,

(ii) $\{(y', f(y')); y' \in B'_r(x'_0)\} \subset \partial\Omega$,

(iii) $\{(y', f(y') + y_n); (y', y_n) \in U_r^+(x_0)\} \subset \Omega$,

(iv) $\{(y', f(y') + y_n); (y', y_n) \in U_r^-(x_0)\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Die Abbildung $\mathbf{\Phi} : U_r(x_0) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathbf{\Phi}(y) \;=\; (y', f(y') + y_n), \quad (y', y_n) \in U_r(x_0)$$

ist ein C^k-Diffeomorphismus und heißt geeignete Transformation lokal um x_0. Aus dem Satz des offenen Bildes (siehe Satz über implizite Funktionen) folgt, dass $V(x_0) = \mathbf{\Phi}(U_r(x_0))$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

Die Abbildung $\mathbf{\Psi} : B'_r(x'_0) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathbf{\Psi}(y') \;=\; \mathbf{\Phi}(y', 0) \;=\; (y', f(y')), \quad y' \in B'_r(x'_0)$$

ist eine *Parametrisierung* des Randstücks $M = \mathbf{\Psi}(B'_r(x'_0))$. Elementar bekommt man

$$\det(D\mathbf{\Psi}^\top(y') \cdot D\mathbf{\Psi}(y')) \;=\; 1 + |Df(y')|^2 \quad \forall\, y' \in B'_r(x'_0). \tag{1.2}$$

Somit haben wir für das Flächenelement

$$dS(x) \;=\; \sqrt{1 + |Df(y')|^2}dy', \quad y' \in B_r(x'_0),$$

und für die äußere Einheitsnormale entlang $\partial\Omega$ gilt:

$$\boldsymbol{n}(y', f(y')) \;=\; \frac{(Df(y'), -1)^\top}{\sqrt{1 + |Df(y')|^2}}, \quad y' \in B_r(x'_0).$$

Eine Funktion $g : M \to \mathbb{R}\,(M = \mathbf{\Psi}(B'_r(x'_0)))$ heißt bezüglich des Oberflächenmaßes dS integrierbar, falls $g \circ \mathbf{\Psi} : B'_r(x'_0) \to \mathbb{R}$ bezüglich dy' Lebesgue-integrierbar ist . Dann definieren wir das Integral

$$\int\limits_M g dS \;=\; \int\limits_{B'_r(x'_0)} g(y', f(y'))\sqrt{1 + |Df(y')|^2}dy'.$$

Lemma 1.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $V(x_0) = \mathbf{\Phi}(U_r(x_0))$ mit $\mathbf{\Phi} \in C^1(U_r(x_0))$ gemäß Definition 1.2. Dann gilt für jede Funktion $u \in C_0^1(V)$*

$$\int\limits_{V\cap\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \;=\; \int\limits_{\partial\Omega\cap V} u n_i dS(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Beweis Sei $f \in C^1(B'_r(x'_0))$ die entsprechende Graphenabbildung aus der $\mathbf{\Phi}$ hervorgeht. Elementar berechnet man

$$\partial_{x_i} \circ \mathbf{\Phi} \;=\; \partial_{y_i} - \partial_{y_i} f \partial_{y_n}, \quad \det(D\mathbf{\Phi}) \;=\; 1.$$

Wir setzen $v = u \circ \mathbf{\Phi} \in C_0^1(U_r(x_0))$. Für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ erhält man mithilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int\limits_{V\cap\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \;&=\; \int\limits_{U_r^+(x_0)} \frac{\partial v}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial y_n} dy \;=\; \int\limits_{B'_r(x'_0)} v(y', 0)\frac{\partial f}{\partial y_i} dy' \\
&= \int\limits_{B'_r(x'_0)} u(y', f(y'))\nu_i(y', f(y'))\sqrt{1 + |Df(y')|^2} dy' \\
&= \int\limits_{\partial\Omega\cap V} u\nu_i dS(x).
\end{aligned}$$

Für $i = n$ folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{V\cap\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx \;&=\; \int\limits_{U_r^+(x_0)} \frac{\partial v}{\partial y_n} dy \;=\; -\int\limits_{B'_r(x'_0)} v(y', 0) dy' \\
&= \int\limits_{B'_r(x'_0)} u(y', f(y'))\nu_n(y', f(y'))\sqrt{1 + |Df(y')|^2} dy' \\
&= \int\limits_{\partial\Omega\cap V} u\nu_n dS(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 (**Zerlegung der 1**) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathscr{V} = \{V_i; i = 1, \ldots, m\}$ eine endliche offene Überdeckung von K. Dann existiert eine Familie glatter Funktionen $\{\psi_i; i = 1, \ldots, m\}$, so dass*

(i) $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset V_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,$

(ii) $\sum\limits_i \psi_i(x) \;=\; 1 \quad \forall\, x \in K.$

Beweis Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathscr{V} = \{V_i; i = 1, \ldots, m\}$ eine endliche offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren offene Mengen $U_i \subset\subset V_i$ so, dass $\{U_i; i = 1, \ldots, m\}$ bereits K überdecken. Dann existieren Funktionen $\zeta_i \in C_0^\infty(V_i)$ mit

$0 \le \zeta_i \le 1$ in $\mathbb{R}^n$ und $\zeta_i \equiv 1$ auf $\overline{U}_i$. Außerdem existiert eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \equiv 1$ auf K und $\operatorname{supp} \eta \subset \cup_{i=1}^m U_i$ Setzt man

$$\psi_i(x) \;=\; \begin{cases} \eta(x) \dfrac{\zeta_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^m \zeta_j(x)} & \text{falls} \quad \sum\limits_{j=1}^m \zeta_j(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad \sum\limits_{j=1}^m \zeta_j(x) = 0, \end{cases}$$

so genügen die $\{\psi_i\}$ den Anforderungen von Prop. 1.4. ■

Satz 1.5 (**Gaußscher Integralsatz**) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Sei $\boldsymbol{f} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS(x). \tag{1.4}$$

Beweis Sei $\boldsymbol{f} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Fortsetzung $\boldsymbol{g} \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, d.h. $g|_{\overline{\Omega}} = \boldsymbol{f}$. (Man überlege sich dies zunächst für den Fall des Halbraums vermöge einer ungeraden Fortsetung und anschließender Abschneidung. Für den allgemeinen Fall betrachte man die entsprechenden lokalen Darstellungen des Randes konstruiere eine Fortsetzung mithilfe einer Zerlegung der Eins).

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, lässt sich $\partial\Omega$ durch endlich viele $V_i = \boldsymbol{\Phi}_i(U_{r_i}(x_i))$ $(i = 1, \ldots, m)$ gemäß Definition 1.2 überdecken. Seien $f_i \in C^1(B_{r_i}(x_i'))$ die entsprechenden Graphenabbildungen, so dass (nach eventueller Umnummerierung) gilt:

$$\partial\Omega \cap V_i \;=\; \{(y', f_i(y')); y' \in B_{r_i}(x_i')\}.$$

Sei $V_0 \subset\subset \Omega$, so dass $\cup_{i=0}^m V(x_i) \supset \overline{\Omega}$. Gemäß Prop. 1.4 existiert eine **Zd1** zu der Überdeckung $\{V_0, \ldots, V_m\}$ bezüglich $\overline{\Omega}$. Dann

$$\boldsymbol{f} \;=\; \sum_{j=0}^m \psi_j \boldsymbol{f} \quad \text{auf} \quad \overline{\Omega}.$$

Folglich haben wir

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} dx \;=\; \sum_{j=0}^m \int_\Omega \operatorname{div} \psi_j \boldsymbol{f} dx, \quad \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS(x) \;=\; \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} \psi_j \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS(x).$$

Wegen $\displaystyle\int_\Omega \psi_0 \operatorname{div} \boldsymbol{f} dx \;=\; 0$ (vgl. Satz 1.1) genügt es zu zeigen, dass

$$\int_\Omega \operatorname{div} \psi_j \boldsymbol{f} dx \;=\; \int_{\partial\Omega} \psi_j \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS(x) \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,$$

was aber wegen $\psi_j \boldsymbol{g} \in C_0^1(V_i)$ $(\boldsymbol{g}|_{\overline{\Omega}} = \boldsymbol{f})$ sofort aus Lemma 1.3 folgt. ■

Folgerung 1.6 (**Greensche Formeln**) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Für alle $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt:*

(I) 1. Greensche Formel*:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} dS(x). \tag{1.5}$$

(II) 2. Greensche Formel*:*

$$\int_\Omega u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS(x) + \int_\Omega v \Delta u dx. \tag{1.6}$$

Hierbei bezeichne $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{u}}(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ die Ableitung von u in Richtung der äußeren Normale $\boldsymbol{n}(x)$ im Punkt $x \in \partial\Omega$ und ∇u bezeichne den Vektor $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Beispiel 1.7 (**Faradayscher Käfig**) Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann ist $u \equiv 0$.

Beweis Mithilfe der 1. Greenschen Formel mit $u = v$ folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx &= -\int_\Omega u \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS(x), \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\nabla u \equiv 0$. Folglich ist $u \equiv$ konst. Wegen $u = 0$ auf $\partial\Omega$ haben wir $u \equiv 0$.

Satz 1.8 (**Poincaré-Friedrich Ungleichung**) *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)} \quad \forall\, 1 \le p < \infty, \tag{1.7}$$

wobei $C = \mathrm{const} > 0$ von n, p und $\mathrm{diam}(\Omega)$ abhängt.

Beweis (Für $p > 1$, $0 \in \Omega$) Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist $\boldsymbol{f} = x|u|^p$ in $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Elementar berechnet man,

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} = (\mathrm{div}\, x)|u|^p + px \cdot u|u|^{p-2}\nabla u = n|u|^p + px \cdot u|u|^{p-2}\nabla u \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes findet man

$$\int_{\Omega} (n|u|^p + px \cdot u|u|^{p-2}\nabla u)dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{f} dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p x \cdot \boldsymbol{n} dS(x) = 0.$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung schließt man

$$n \int_{\Omega} |u|^p dx = -p \int_{\Omega} x \cdot u|u|^{p-2}\nabla u dx \le p\mathrm{diam}(\Omega) \int_{\Omega} |u|^{p-1}|\nabla u| dx$$
$$\le p\mathrm{diam}(\Omega) \Big(\int_{\Omega} u^p dx \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Nach Division beider Seiten durch $\Big(\int_{\Omega} u^p dx \Big)^{\frac{p-1}{p}}$ ergibt sich die Behauptung. ■

2 Modelle

2.1 Masseerhaltung. Kontinuitätsgleichung

Sei $\rho = \rho(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dichte eines Gases. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Testvolumen*, ein beschränktes reguläres Gebiet. Dann ist

$$m(t;\Omega) = \int_{\Omega} \rho(x,t) dx = \textit{ Masse des Gases in } \Omega \text{ zur Zeit } t > 0.$$

Folglich gilt:

$$\dot{m}(t;\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x,t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dx. \tag{2.1}$$

Sei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ das Geschwindigkeitsfeld des Gases. Dann ist

$$j(t;\Omega) = \int_{\partial\Omega} \rho(x,t) \langle \boldsymbol{v}(x,t), -\nu \rangle dS(x) = \textit{ Teilchenstrom in } \Omega\text{: Masse/Zeit} \tag{2.2}$$

Hierbei nehmen wir an, dass $\boldsymbol{v}(t) \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes mit $\boldsymbol{f} = -\rho\boldsymbol{v}$ erhält man

$$j(t;\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) dx.$$

Das Gesetz der Masseerhaltung besagt $\dot{m}(t;\Omega) = j(t;\Omega)$, also

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) dx = 0. \tag{2.3}$$

Wegen der Beliebigkeit des Testvolumens erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (\textit{Kontinuitätsgleichung}). \tag{2.4}$$

Das konstitutive Gesetz Kontinuitätsgleichung enthält die vier Unbekannten ρ, v_1, v_2, v_3. Abschließung über ein konstitutives Gesetz

$$\boldsymbol{v} = f(\rho), \tag{2.5}$$

wobei zwei Möglichkeiten bestehen:

A. *Lokal*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

B: *Nicht lokal*: $f = T : C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ ein Operator.

2.2 Einfachste partielle Differentialgleichung erster Ordnung

In (2.4) nehmen wir an $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{b}$, wobei $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ konstant ist. Dann folgt aus (2.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Teilchen bewegen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{b}$. Unter Hinzunahme inhomogener Terme führt dies zur ersten PDE,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch und kann mithilfe von Charakteristiken gelöst werden.

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ fixiert. Für $\xi_x(t) := u(x + t\boldsymbol{b}, t)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_x(t) &= \frac{d}{dt} u(x + t\boldsymbol{b}, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x + t\boldsymbol{b}, t) + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u(x + t\boldsymbol{b}, t) = f(x + t\boldsymbol{b}, t). \end{aligned}$$

Somit, genügt ξ_x der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\xi}_x(t) = f(x + t\boldsymbol{b}, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi_x(0) = u_0(x). \tag{2.8}$$

2.3 Die reibungsfreie Burgers-Gleichung

Modell der "Schockbildung": Eindimensionales Gas bewegt sich nach rechts. Annahme für konstitutives Gesetz (mit $\rho = u$): $\boldsymbol{v} = au \, (a > 0)$. Nach Skalierung $a = \frac{1}{2}$, dies führt zur Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Man beachte: $\frac{1}{2}(u^2)_x = uu_x$.

2.4 Gleichung der eingespannten schwingenden Saite

Eine elastische Saite der Länge $L > 0$ sei an zwei Enden eingespannt. Wir modellieren die Saite zum Zeitpunkt $t > 0$, durch einen Graph einer Funktion $u(\cdot, t) : [0, L] \to \mathbb{R}$. Hierbei ist

$$u(x,t) = \textit{ Auslenkung der Saite in } x \in [0, L] \textit{ zum Zeitpunkt } t.$$

1. Randbedingung Da die Seite eingespannt ist, gilt

$$u(0,t) \;=\; u(L,t) \;=\; 0 \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.10}$$

2. Inneren Kräfte Die inneren Kräfte sind die Spannungen der Seite. Vernachlässigt man den Biegewiderstand, so sind die Spannungskräfte $\boldsymbol{F}_\sigma$ stets tangential zum Graphen von u. Das heißt die Spannungskräfte $\boldsymbol{F}(x,t)$ sind proportional zu $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{(1, u_x(x,t))}{\sqrt{1+(u_x)^2(x,t)}}$. Wir setzen

$$\sigma(x,t) := |\boldsymbol{F}_\sigma(x,t)|, \quad \vec{\boldsymbol{\sigma}}(x,t) \;=\; \sigma(x,t)\frac{(1, u_x(x,t))}{\sqrt{1+(u_x(x,t))^2}}.$$

Die Gesamtspannung zum Zeitpunkt $t \geq 0$ beträgt somit

$$\boldsymbol{F}_\sigma(t) \;=\; -\vec{\boldsymbol{\sigma}}(0,t) \;+\; \vec{\boldsymbol{\sigma}}(L,t). \tag{2.11}$$

3. Äußere Kräfte Wir nehmen an, es wirken nur vertikale äußere Kräfte (z.B. Gravitationskraft). Die äußere Kraft, sei gegeben durch

$$\boldsymbol{F}_a \;=\; (0, -f),$$

wobei $f : [0, L] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

4. Kräftebilanzen vertikal Seien $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$ beliebig fixiert. Nach dem *Newtonschen Gesetz* gilt **L.S.**: *Masse* $\cdot$ *Beschleunigung* = **R.S.**: Summe aller Kräfte:

$$\textbf{L.S.} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \rho \ddot{u}(x,t)dx$$

und nach (2.11)

$$\textbf{R.S.} \;=\; -\sigma_n(x_1,t) \;+\; \sigma_n(x_2,t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx \;=\; \int_{x_1}^{x_2} (\sigma_n)_x(x,t) + f(x,t)dx,$$

wobei

$$\sigma_n \;=\; \sigma\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \quad \text{in} \quad [0, L] \times [0, \infty).$$

Setzt man beide Seiten gleich, so folgt

$$\rho\ddot{u} \;=\; \left(\sigma\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_x \;+\; f \quad \text{in} \quad [0, L] \times [0, \infty). \tag{2.12}$$

5. Kräftebilanzen horizontal Wir nehmen an, dass horizontal keine Beschleunigung stattfindet. Dann haben wir

$$0 \;=\; -\sigma_h(x,t) \;+\; \sigma_h(L,t) \quad \forall\, x \in [0,L],$$

wobei

$$\sigma_h \;=\; \sigma \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \quad \text{in} \quad [0,L]\times[0,\infty).$$

Wir nehmen an, dass

$$\sigma_h(L,t) \;=\; \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{1+(u_x(L,t))^2}} \quad \forall\, t \geq t \quad (\sigma_0 = \text{const} > 0). \tag{2.13}$$

Wir nehmen an, dass $u_x(L,t) << 1$, also auch

$$(u_x(L,t))^2 << 1, \quad ((u_x(L,t))^2)_x = 2u_x(L,t)u_{xx}(L,t) << 1$$

(kleine Auslenkung). Somit folgt aus (2.13)

$$\sigma_h(x,t) \;=\; \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{1+(u_x(L,t))^2}} \sim \sigma_0. \tag{2.14}$$

6. Wellengleichung, Rand- und Anfangsdaten Aus (2.12) und (2.14) ergibt sich die Wellengleichung.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} \;=\; \dfrac{f}{\rho} \quad \text{in} \quad [0,L]\times[0,\infty). \\ u(0,t) = u(L,t) \;=\; 0 \quad \forall\, t \geq 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad u_t(\cdot,0) \;=\; v_0 \quad \text{in} \quad [0,L], \end{cases} \tag{2.15}$$

wobei

$$a^2 \;=\; \frac{\sigma_0}{\rho} \quad \Big(\dim(a^2) = \frac{gm}{s^2}\frac{m}{g} = \frac{m^2}{s^2}\Big).$$

Also ist $\dim(a) = \frac{m}{s}$ eine Geschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit).

2.5 Höherdimensionale Wellengleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet. Betrachten eine am Rand $\partial\Omega$ eingespannte schwingende Membran. Wiederholt man die Herleitung wie bei $n=1$, so führt dies zu einer analogen PDGl, wobei $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ durch den Laplace-Operator Δ ersetzt wird.

$$\Delta u(x,t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Wir erhalten die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}\times[0,\infty). \\ u(\cdot,t) \;=\; 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad \forall\, t \geq 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad u_t(\cdot,0) \;=\; v_0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.6 Wärmeleitungsgleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wärmeleitender Körper,
$u = u(x,t) =$ Temperatur
Annahmen:

- Konstante Dichte ρ.
- **Ficksches Gesetz**: $\boldsymbol{J} = -\kappa \nabla u$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \text{Stromdichte} \quad (J/(s \cdot m^2) = W/m^2) \\
\kappa &= \text{Wärmeleitfähigkeit} \quad (J/(sm^2K/m)) = J/s/(Km) = W/(Km)
\end{aligned}
$$

$[\nabla u] = \frac{K}{m}$

- Konstante spezifische Energie C $\quad \frac{\Delta J}{\Delta K \cdot \mathrm{kg}} = \frac{m^2}{K \cdot s^2}$
- Energiezufuhrdichte $f : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad (J/(s \cdot m^3) = W/m^3)$
- Energie $C\rho u_t$ $\quad (\frac{K}{s}\frac{m^2}{K \cdot s^2}\frac{kg}{m^3} = \frac{m^2 kg}{s^3 m^3} = W/m^3)$

Sei $G \subset \Omega$ ein Testvolumen. Für die Wärmeenergie in G zur Zeit $t \geq 0$ gilt

$$E_G(t) = C\rho \int_G u(x,t)dx \quad ([E_G] = J).$$

Für die Änderungsrate der Wärmeenergie bekommt man

$$\frac{d}{dt} E_G(t) = C\rho \int_G u_t(x,t)dx.$$

Auf der Seite gilt:

$$\frac{d}{dt} E_G(t) = \int_{\partial G} \boldsymbol{J}(x,t) \cdot (-\boldsymbol{n})dS + \int_G f dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_G -\operatorname{div} \boldsymbol{J} + f dx$$

Da G beliebig war bekommt man

$$u_t + \frac{1}{C\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{J} = \frac{1}{C\rho} f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [0,\infty). \tag{2.17}$$

Randbedingungen

(I) *Dirichlet-Randbedingung* Vorgegebene Temperatur auf dem Rand $\partial\Omega$.

$$u = \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

(II) *Neumann-Randbedingung*: Vorgegebener Wärmefluß durch $\partial\Omega$.

$$\boldsymbol{J} \cdot (-\boldsymbol{n}) \;=\; \kappa \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \;=\; \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Wir erhalten nach Einsetzen und Reskalieren, dass u ist Lösung des

I Dirichletproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [0, \infty) \\ u(\cdot, t) \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad \forall\, t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \qquad \text{in} \quad \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2.18}$$

II Neumannproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [0, \infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\cdot, t) \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad \forall\, t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \qquad \text{in} \quad \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2.19}$$

2.7 Reaktions- und Diffusionsgleichungen

Wärmeleitung + chemische Reaktion wird modelliert durch die Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite $f = f(u)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Nichtlinearität ist.

$$u_t - \Delta u \;=\; f(u) \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [0, \infty). \tag{2.20}$$

Beispiele:

- $f(u) \;=\; |u|^{p-1} u \,(p > 1)$,
- $f(u) = \lambda (1 + u)^p \,(p > 1)$,
- $f(u) = \lambda \exp(u), \ldots$

2.8 Stationäre Poisson-Gleichung

Ein stationärer Zustand der Wärmeverteilung wird beschrieben durch

I Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}, \\ u \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

oder

II Neumanproblem

$$
(2.22) \qquad \begin{cases} -\Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

Interpretation von (2.21)

- $n = 1, 2$: Stationäre Auslenkung eingespannter Saite (Membran),
- $n = 3$: stationäre Temperaturverteilung bei vorgegebener Temperatur an $\partial\Omega$
- $n = 3$: Elektrostatik: f =Ladungsdichte, $\varphi = 0$ bedeutet, dass Ω von Leiter = Äquipotentialfläche umgeben wird, u = elektrisches Potential.

Interpretation von (2.22)

- $n = 3$: stationäre Temperaturverteilung bei vorgegebenen Wärmefluß durch $\partial\Omega$

Neumannbedingung auch bei Populationsmodellen: Ω = Insel, $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ bedeutet, Leute können nicht schwimmen.

2.9 Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{cases} u_t - \Delta u \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \Omega \in (0, \infty), \\ u \;=\; 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases}
$$

Um diese Gleichung zu lösen benutzen wir die *Separationsmethode*. Wir nehmen an, die Lösung u läßt sich schreiben in der Form

$$
u(x, t) \;=\; a(t)v(x), \quad x \in \Omega, t \geq 0.
$$

Nach Einsetzen in die obige Gleichung folgt

$$
-a'(t)v(x) = -a(t)\Delta v(x).
$$

Unter der Annahme, dass $a(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 > 0$ und $u(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \Omega$ folgt

$$
-\frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{\Delta v(x)}{v(x)} \quad \text{in einer Umgebung von } t_0 \text{ und einer Umgebung von } x_0
$$

Folglich existiert eine konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$-\frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{\Delta v(x)}{v(x)} = \lambda \quad \text{in einer Umgebung von } t_0 \text{ und einer Umgebung von } x_0$$

Hieraus schließt man, dass $a(t) = Ce^{-\lambda t}$ mit $C \neq 0$ für alle $t \geq 0$.

Die Funktion v genügt der Eigenwertaufgabe

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v \quad \text{in} \quad \Omega, \quad v \not\equiv 0. \\ v = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Diese Eigenwertaufgabe heißt **Helmholtzgleichung**. Die Funktion v heißt *Eigenfunktion* zu dem *Eigenwert* λ

Ist Ω ein beschränktes reguläres Gebiet, dann hat $-\Delta$ die Eigenwerte $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, mit $\lambda_n \to \infty$. (Siehe unten Kap. 5) mit dem zugehörigem System von Eigenfunktionen $\{v_k\}$ wobei $\|v_k\|_{L^2} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese bilden ein vollständiges ONS in $L^2(\Omega)$. Ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ der Anfangswert, so läßt sich u_0 durch folgende Fourierreihe darstellen

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x), \quad c_n = \int_\Omega u_0 v_n dy \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann hat die Lösung die Darstellung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) e^{-\lambda_n t}.$$

2.10 Minimalflächen

Wir betrachten die folgende Aufgabe: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Wir suchen eine Fläche F, dargestellt als Graph einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit minimalem Flächeninhalt, bei vorgegebener Höhe $u(x) = \varphi(x)$ für $x \in \partial\Omega$ am Rand der Fläche. Mit anderen Worten: Wir suchen eine Fläche mit minimalem Flächeninhalt bei vorgegebenem Rand (**Minimalfläche**).

Sei $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen also eine Funktion $u \in M_\varphi := \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u(x) = \varphi(x) \forall\, x \in \partial\Omega\}$, so dass der Flächeninhalt der Fläche $G(u) = \{(x, u(x)) : x \in \overline{\Omega}\}$ minimal ist. Die Aufgabe besteht also darin, das folgende Flächeninhaltsfunktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx, \quad u \in M_\varphi$$

zu minimisieren.

Sei also $\overline{u} \in M_\varphi$, so dass

$$\mathcal{F}(\overline{u}) = \min_{u \in M_\varphi} \mathcal{F}(u).$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ ist $\overline{u} + t\phi \in M_\varphi$ und aus der Minimaleigenschaft folgt

$$\mathcal{F}(\overline{u} + t\phi) \geq \mathcal{F}(\overline{u}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Folglich hat die Funktion $t \mapsto \mathcal{F}(\overline{u} + t\phi)$ ein lokales Minimum in $t = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\overline{u} + t\phi)|_{t=0} \;=\; 0.$$

Unter Verwendung der Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}
0 \;=\; \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\overline{u} + t\phi)\Big|_{t=0} &= \int\limits_\Omega \frac{(\nabla\overline{u} + t\nabla\phi)\cdot\nabla\phi}{\sqrt{1 + |\nabla\overline{u} + t\nabla\phi|^2}}dx\Big|_{t=0} \\
&= \int\limits_\Omega \frac{\nabla\overline{u}\cdot\nabla\phi}{\sqrt{1+|\nabla\overline{u}|^2}}dx.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung partieller Integration folgt

$$-\int\limits_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\overline{u}}{\sqrt{1+|\nabla\overline{u}|^2}}\right)\phi dx \;=\; 0 \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Somit genügt $\overline{u}$ der folgenden **Minimalflächengleichung**

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla\overline{u}}{\sqrt{1+|\nabla\overline{u}|^2}}\right) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \overline{u} \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

2.11 Volumenerhaltung

Sei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,t)$ ein glattes Geschwindigkeitsfeld, einer inkompressiblen Strömung, was bedeutet, dass das Volumen stets erhalten bleibt. Sei $t_0 \geq 0$ fixiert. Sei Ω ein Testvolumen zum Zeitpunkt $t = t_0$, welches sich zu einem Volumen $\Omega(t)$ zum Zeitpunkt $t > t_0$ verformt hat. Ist $x \in \Omega$ der Ort eines Partikels zum Zeitpunkt $t = t_0$, so bezeichne $\boldsymbol{A}(x,t)$ den Ort des Partikels zum Zeitpunkt $t > t_0$. Ist $x \in \Omega$ fixiert, so beschreibt $t \mapsto \boldsymbol{Y}_x(t) := \boldsymbol{A}(x,t)$ die Partikelbahn des Teilchens, und genügt somit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_x(t) \;=\; \boldsymbol{v}(\boldsymbol{Y}_x(t),t), \quad t \geq t_0, \quad \boldsymbol{Y}_x(t_0) = x.$$

Die Abbildung $(x,t) \mapsto \boldsymbol{Y}_x(t) = \boldsymbol{A}(x,t)$ ist somit der Fluß. Wir haben also

$$\Omega(t) \;=\; \boldsymbol{A}(\cdot,t)(\Omega).$$

Aus der Volumenerhaltung ergibt sich

$$|\Omega| = \int\limits_\Omega dx \;=\; \int\limits_{\Omega(t)} dx \;=\; \int\limits_\Omega |\det\nabla_x\boldsymbol{A}(x,t)|dx \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Folglich haben wir

$$\det \nabla_x \boldsymbol{A}(x,t) \;\equiv\; \det \nabla_x \boldsymbol{A}(x,t_0) \;=\; 1.$$

Wir setzen

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t) := x - \boldsymbol{A}(x,t) + (t_0 - t)\boldsymbol{v}(x,t_0), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq t_0.$$

Elementar berechnet man

$$\begin{aligned}\det \nabla_x \boldsymbol{\Phi}(x,t) \;&=\; 1 - \det \nabla_x \boldsymbol{A}(x,t) + (t_0 - t)\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,t_0) \;+\; \boldsymbol{C}(x,t)(t-t_0)^2 \\ &=\; (t_0 - t)\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,t_0) \;+\; \boldsymbol{C}(x,t)(t_0-t)^2\end{aligned}$$

mit beschränktem $\boldsymbol{C}$. Auf der anderen Seite folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}x - \boldsymbol{A}(x,t) \;=\; \boldsymbol{A}(x,t_0) - \boldsymbol{A}(x,t) \;&=\; \int_0^1 \partial_t \boldsymbol{A}(x, t_0 + s(t-t_0))ds(t_0 - t) \\ &=\; \int_0^1 \dot{\boldsymbol{Y}}_x(t_0 + s(t-t_0))ds(t_0-t) \\ &=\; \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}(x, t_0 + s(t-t_0)), t_0 + s(t-t_0))ds(t_0-t)\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$|\nabla_x \boldsymbol{\Phi}(x,t)| \;\leq\; c(t-t_0) \quad \Longrightarrow \quad |\det \nabla_x \boldsymbol{\Phi}(x,t)| \;\leq\; c(t-t_0)^3$$

Dies liefert

$$|\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,t_0)| \;\leq\; c(t-t_0) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to t_0,$$

also $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,t_0) = 0$. Die Gleichung der Volumenerhaltung lautet somit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

2.12 Die Grundtypen partieller Differentialgleichungen

Wir wiederholen zunächst den Begriff der Signatur einer symmetrischen Matrtx.

Definition 2.1 (**Index**) Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, so dass ihre Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen sind. Mit $k^+(\boldsymbol{A})$ (bzw. $k^-(\boldsymbol{A})$ bezeichnen wir die Anzahl der positiven Eigenwerte λ_i (bzw. die Anzahl der negativen Eigenwerte λ_i). Ferner bezeiche $k^0(\boldsymbol{A})$ die Anzahl aller Eigenwerte $\lambda_i = 0$. Nach dem Trägheitssatz von Silvester gilt:

$$n = k^+(\boldsymbol{A}) + k^-(\boldsymbol{A}) + k^0(\boldsymbol{A}).$$

Außderdem ist $k^0(\boldsymbol{A}) = \dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}))$. Das Tripel $\sigma(\boldsymbol{A}) = (k^+(\boldsymbol{A}), -k^-(\boldsymbol{A}), -k^0(\boldsymbol{A})) \in \mathbb{Z}^3$ heißt *Signatur* der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir beschränken uns bei den folgenden Betrachtunen auf den Fall lineare partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung der folgenden Form:

$$Lu = f, \quad \text{in} \quad \Omega,$$

wobei $L : C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ ein linearer Differentialoperator folgender Gestalt ist

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

mit $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{\Omega})\,(i,j = 1,\ldots,n)$. Wir schreiben kurz $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$.

Definition 2.2 Sei $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung. Ferner sei $\boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x))$ für jedes $x \in \Omega$ symmetrisch, so dass ihre Eigenwerte $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ alle reell sind. Wir sagen L ist im Punkt $x_0 \in \Omega$

(i) *elliptisch*, falls $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (n, 0, 0)$ oder $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (0, -n, 0)$, das heißt, alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}(x_0)$ sind entweder positiv oder negativ;

(ii) *parabolisch*, falls $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (n-1, 0, 1)$ oder $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (0, -(n-1), 1)$, das heißt ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}(x_0)$ verschwindet und die Anderen sind entweder positiv oder negativ;

(iii) *hyperbolisch*, falls $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (n-1, -1, 0)$ oder $\sigma(\boldsymbol{A}(x_0)) = (1, -(n-1), 0)$, das heißt entweder ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}(x_0)$ ist positiv und die Anderen sind negativ oder ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}(x_0)$ ist negativ und die Anderen sind positv.

Ferner heißt L *elliptisch* (*parabolisch* bzw. *hyperbolisch*), falls L in jedem Punkt $x \in \overline{\Omega}$ elliptisch (parabolisch bzw. hyperbolisch ist).

Beispiele 2.4 *1. Der Laplace-Operator:* $L = -\Delta = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Hierbei ist $\boldsymbol{A}(x)$ gleich $-\boldsymbol{E}$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist. Folglich gilt $\sigma(\boldsymbol{A}(x)) = \sigma(-\boldsymbol{E}) = (0, -n, 0)$. Folglich ist $-\Delta$ **elliptisch**.
2. Der Wärmeleitungsoperator: $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ in $Q = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & -1 & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots0 \end{pmatrix}$$

$((x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T])$ eine $((n+1)\times(n+1)) - Matrix$ und es gilt $\sigma(\boldsymbol{A}) = (0,-n,1)$. Folglich ist $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ **parabolisch**.

2. Der Wellenoperator: $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ in $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Dann ist

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & -1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

$((x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T])$ eine $((n+1)\times(n+1)) - Matrix$ und es gilt $\sigma(\boldsymbol{A}) = (1,-n,0)$. Folglich ist $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ **hyperbolisch**.

3 Elliptische Differentialgleichungen

3.1 Harmonische Funktionen

Definition 3.1 (**harmonisch**) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt *harmonisch in* Ω, falls

$$\Delta u(x) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Notation.

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \text{ Menge aller in } \Omega \text{ harmonischen Funktionen} \\ \overline{H}(\Omega) &= C^0(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega). \end{aligned}$$

Motivation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Wir fragen nach Existenz und Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Wir suchen also eine Funktion $u \in \overline{H}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

3.2 Die Mittelwerteigenschaft

Wir setzen

$$e_n := \mathrm{vol}_n(B_1(0)).$$

Dann gilt $ne_n = \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))$.

Definition 3.2 Wir sagen, $u \in C^0(\Omega)$ genügt der *Mittelwerteigenschaft*, falls

$$u(x_0) = \frac{1}{e_n R^n} \int_B u dx = \frac{1}{n e_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u dS \tag{3.2}$$

für alle $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$.

Bemerkung 3.3 Sei $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Wegen

$$\frac{1}{e_n R^n} \int_B u dx = \frac{1}{e_n R^n} \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS dr$$

folgt die erste Identität in (3.2) aus der Zweiten.

Genügt andererseits u der ersten Identität, so ergibt sich nach Multiplikation beider Seiten mit R

$$R u(x_0) = \frac{1}{e_n R^{n-1}} \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} u dS dr.$$

Leitet man beide Seiten dieser Gleichung nach R ab, so ergibt sich

$$u(x_0) = (1-n) u(x_0) + \frac{1}{e_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u dS,$$

woraus die zweite Identität folgt. Folglich genügt es, für den Nachweis der Mittelwerteigenschaft, die erste oder die zweite Identität in (3.2) zu beweisen. $\square$

Proposition 3.4 *Sei $u \in C^0(\Omega)$ und genüge der Mittelwerteigenschaft. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis Sei $u \in C^0(\Omega)$ eine Funktion, die der Mittelwerteigenschaft genügt. Sei $x_0 \in \Omega$. Setzen $d = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und $R := \frac{d}{2}$. Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}), h \not\equiv 0, h \geq 0$ mit $\operatorname{supp} h \subset (-\infty, R^2)$. Wir setzen $\phi(x) = h(|x|^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Offensichtlich gilt $\operatorname{supp}(\phi) \subset B_R(0)$ und

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = \int_0^R n e_n r^{n-1} h(r^2) dr > 0.$$

Sei $x \in B = B_R(x_0)$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt

$$u(x) = \frac{1}{n e_n r^{n-1}} \int_{|y|=r} u(x-y) dS \quad \forall\, 0 < r < R.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $ne_n r^{n-1}h(r^2)$ und integrieren das Ergebnis über $(0, R)$. Hiermit bekommt man

$$\begin{aligned} c_0 u(x) &= u(x) \int\limits_0^R ne_n r^{n-1} h(r^2) dr \\ &= \int\limits_0^R \int\limits_{|y|=r} u(x-y)h(r)dS \\ &= \int\limits_{B_R(x)} u(y)\phi(x-y)dy = \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u(y)\phi(x-y)dy. \end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt wegen $\operatorname{supp}(\phi(x-\cdot)) \subset B_R(x)$ und $B_R(x) \subset B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$. Offensichtlich ist die rechte Seite in $C^\infty(B)$. Beachtet man $c_0 > 0$, so folgt $u|_B \in C^\infty(B)$. ■

Satz 3.5 *Eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ genügt der Mittelwerteigenschaft genau dann, wenn $u \in H(\Omega)$.*

Beweis 1° $\Leftarrow$: Sei $B := B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Wegen $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0$ bekommt man mithilfe des Gaußschen Integralsatzes für jedes $r \in (0, R)$

$$0 = r \int\limits_{B_r(x_0)} \operatorname{div} \nabla u dx = \int\limits_{\partial B_r(x_0)} \nabla u(x) \cdot (x - x_0) dS.$$

Nach Integration über $(0, R)$ erhält man

$$\int\limits_{B_R(x_0)} \nabla u(x) \cdot (x - x_0) dx = 0.$$

Auf der anderen Seite folgt mithilfe der Transformationsformel und der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR}\Bigg(R^{-n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx\Bigg) &= \frac{d}{dR}\Bigg(\int\limits_{B_1(0)} u(x_0 + Ry)dy\Bigg) \\ &= \int\limits_{B_1(0)} \nabla u(x_0 + Ry) \cdot y dy \\ &= R^{-n-1} \int\limits_{B_R(x_0)} \nabla u(x) \cdot (x - x_0) dx = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $R \mapsto \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx$ konstant ist. Wegen

$$\lim_{R \to 0^+} \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx \to u(x_0)$$

genügt u der Mittelwerteigenschaft (vgl. auch Bem. 3.3).

2° $\Rightarrow$: Sei $u \in C^0(\Omega)$ eine Funktion, die der Mittelwerteigenschaft genügt. Aus Proposition 3.4 folgt $u \in C^\infty(\Omega)$. Aus (3.2) folgt für $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{e_n}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{B_1} u(x+Ry)dy = \frac{1}{e_n R^n}\int\limits_{B_R(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy \quad \forall\, B_R(x) \subset\subset \Omega.$$

Somit genügt auch jede partielle Ableitung von u, insbesondere auch Δu der Mittelwerteigenschaft (vgl. Bem. 3.3). Sei $x_0 \in \Omega$. Da die Funktion

$$\Phi : r \mapsto \frac{1}{r^{n-1}}\int\limits_{\partial B_r(x_0)} u(y)dS = \int\limits_{\partial B_1} u(x_0+ry)dS$$

nach Voraussetzung auf $(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$ konstant ist, haben wir

$$0 \;=\; \Phi'(r) \;=\; \int\limits_{\partial B_1} y \cdot \nabla u(x_0+ry)dS \;=\; r^{1-n}\int\limits_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x)dS.$$

Unter Verwendung der zweiten Greenschen Formel zusammen mit der Mittelwerteigenschaft für Δu folgt

$$0 = \int\limits_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x)dS = \int\limits_{B_r(x_0)} \Delta u(x)dx \;=\; e_n r^n \Delta u(x_0).$$

Demzufolge ist u harmonisch in Ω ■

Bemerkung 3.6 Wie der Satz 3.5 zeigt, ist die Eigenschaft harmonisch mit der Mittelwerteigenschaft äquivalent. Somit ist die Mittelwerteigenschaft die zentrale Eigenschaft für harmonische Funktionen. Insbesondere ist jede harmonische Funktion in C^∞. Ein bekanntes Beispiel sind die holomorphen Funktionen. □

3.3 Harnacksche Ungleichung und Satz von Liouville

Als Folgerung aus der Mittelwerteigenschaft ergibt sich die sogenannte Harnacksche Ungleichung

Lemma 3.7 (**Harnacksche Ungleichung I**) *Sei $u \in H(B_{4R}(x_0))$ nichtnegativ. Dann*

$$\sup_{B_R(x_0)} u \le 3^n \inf_{B_R(x_0)} u. \tag{3.3}$$

Beweis Seien $x_1, x_2 \in B_R(x_0)$. Dann $B_R(x_1) \subset B_{3R}(x_2) \subset B_{4R}(x_0)$. Aus (3.2) folgt

$$u(x_1) \;=\; \frac{1}{e_n R^n}\int\limits_{B_R(x_1)} u(x)dx \;\le\; \frac{1}{e_n R^n}\int\limits_{B_{3R}(x_2)} u(x)dx \;=\; 3^n u(x_2).$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung ■

Unter Verwendung von (3.3) bekommt man

Lemma 3.8 (**Harnacksche Ungleichung II**) *Sei* $u \in H(\Omega)$ *nichtnegativ. Sei* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *ein Gebiet. Dann*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u, \tag{3.4}$$

wobei $C = C(n, \Omega, \Omega')$.

Beweis Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dann ist $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Somit existiert eine endliche Überdeckung $\{B_1, \ldots, B_N\}$ offener Kugeln mit $4B_i \subset \Omega\,(i = 1, \ldots, N)$. Ferner kann die Überdeckung so gewählt werden, dass $\cup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1} \neq \emptyset$ [2] für alle $k = 1, \ldots, N-1$. Wir setzen $A_k = \cup_{i=1}^k B_i$. Mithilfe vollständiger Induktion zeigt man

$$\sup_{A_k} u \;\leq\; 3^{kn} \inf_{A_k} u, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Für $k = 1$ folgt die Aussage unmittelbar aus (3.3). Angenommen die Aussage ist für $1 < k < N$ richtig. Unter Verwendung von (3.3) und der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned} \sup_{A_{k+1}} u \;&=\; \max\left\{\sup_{A_k} u, \sup_{B_{k+1}} u\right\} \;\leq\; \max\left\{3^{kn} \inf_{A_k} u, \sup_{B_{k+1}} u\right\} \\ &\leq\; 3^{kn} \sup_{B_{k+1}} u \;\leq\; 3^{(k+1)n} \inf_{B_{k+1}} u. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\sup_{A_{k+1}} u \;\leq\; \max\left\{\sup_{A_k} u, 3^n \inf_{B_{k+1}} u\right\} \;\leq\; 3^{kn} \sup_{A_k} u \;\leq\; 3^{(k+1)n} \inf_{A_k} u.$$

Folglich,

$$\sup_{A_{k+1}} u \;\leq\; 3^{(k+1)n} \min\left\{\inf_{B_{k+1}} u, \inf_{A_k} u\right\} \;=\; 3^{(k+1)n} \inf_{A_{k+1}} u.$$

Somit gilt die Aussage mit $C = 3^{Nn}$. ■

Mithilfe der Harnackschen Ungleichung I beweist man den Satz von Liouville

Satz 3.9 (**Liouville**) *Sei* $u \in H(\mathbb{R}^n)$ *nach oben oder nach unten beschränkt. Dann ist* u *eine konstante Funktion.*

Beweis Sei $u \in H(\mathbb{R}^n)$. O.B.d.A. ist u nach unten beschränkt. Wir setzen $v := u - \inf u$. Dann ist v nichtnegativ mit $\inf v = 0$ und harmonisch in $\mathbb{R}^n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $R_0 > 0$, so dass $\inf_{B_{R_0}} v \leq 3^{-n}\varepsilon$. Mithilfe der Harnackschen Ungleichung I folgt für $R \geq R_0$

$$\sup_{B_R} v \;\leq\; 3^n \inf_{B_R} v \;\leq\; 3^n \inf_{B_{R_0}} v \;\leq\; \varepsilon.$$

Somit ist $\inf v = \sup v = 0$, was die Behauptung beweist. ■

[2] Man beachte, dass Ω' zusammenhängend ist.

3.4 Das Maximumprinzip

Satz 3.10 *1. Das schwache Maximumprinzip: Sei $u \in \overline{H}(\Omega)$ mit $\sup u < +\infty$ und $\sup u = u(x_0)$ für ein $x_0 \in \overline{\Omega}$. Dann gilt:*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \;=\; \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.5}$$

2. Das starke Maximumprinzip: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $u \in H(\Omega)$ mit $M = \sup_\Omega u < +\infty$. Existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M$, so ist $u \equiv M$ in Ω.

Beweis Da die erste aus der zweiten Aussage folgt, genügt es, die zweite Aussage zu zeigen. Nach Voraussetzung ist $M := \sup_\Omega u = u(x_0) < \infty$. Wir definieren

$$A \;=\; \{x \in \Omega\,;\, u(x) = M\}.$$

1° Wegen $x_0 \in A$, ist $A \neq \emptyset$.

2° *Abgeschlossenheit* Sei $\{x_n\}$ eine Folge in A, die gegen ein $x \in \Omega$ konvergiert, so folgt aus der Stetigkeit von u, dass $u(x) = M$. Also ist $x \in A$. Somit ist A in Ω relativ abgeschlossen.

3° *Offenheit* Sei $x \in A$ beliebig. Sei $0 < R < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Dann ist $B_R(x) \subset\subset \Omega$. Da die Funktion $M - u$ ebenfalls harmonisch ist, folgt aus der Mittelwertformel und $u(x) = M$, dass

$$0 \;=\; M - u(x) \;=\; \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x)} (M - u(y))dy.$$

Wegen $M - u \geq 0$, ergibt sich $M - u \equiv 0$ in $B_R(x)$.

Da Ω zusammenhängend ist haben wir $A = \Omega$. ■

Lemma 3.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Seien u, w in Ω harmonisch mit $u \leq w$ und $u(x_0) = w(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$. Dann ist $u = w$.*

Beweis Die Funktion $v = u - w$ ist harmonisch mit $v \leq 0$ und $v(x_0) = 0$. Somit nimmt v sein Maximum im Innern an. Aus dem starken Maximumprinzip (vgl. Satz 3.10/2.) folgt $v \equiv 0$. ■

3.5 Die Fundamentallösung von $-\Delta$

Ziel dieses Abschnittes ist es eine Lösungsformel für die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u \;=\; f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mithilfe der sogenannten Fundamentallösung (bzw. Grundlösung des Laplace-Operators) herzuleiten. Ist nähmlich T eine Distribution mit $-\Delta T = \delta_0$, so folgt für $u = T * f$

$$-\Delta u \;=\; -\Delta T * f \;=\; \delta_0 * f \;=\; f.$$

Also ist u eine formale Lösung der Gleichung (3.6).

Definition 3.12 Eine Funktion $\Phi_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt *Fundamentallösung* für $-\Delta$, falls für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x-y)(-\Delta\varphi)(y)dy \;=\; \varphi(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.^{3)} \tag{3.7}$$

Bemerkung 3.13 1. Ist Φ_0 eine Fundamentallösung für $-\Delta$, so folgt aus (3.7) mit $x = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mithilfe partieller Integration

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(-y)(-\Delta\varphi)(y)dy \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi_0(-y)\varphi(y)dy \;=\; 0.$$

Dies impliziert aber dass Φ_0 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

2. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$u(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x-y)\varphi(y)dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(y)\varphi(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vertauschung von Δ und Integration sowie Anwendung der Transformationsformel liefert

$$-\Delta_x u(x) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(y)\Delta_y\varphi(x-y)dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x-y)(-\Delta\varphi)(y)dy \;=\; \varphi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Folglich löst u die Gleichung

$$-\Delta u \;=\; \varphi \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

Allerdings ist u nicht eindeutig, da $u + h$ mit $h \in H(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls eine Lösung ist. Verlangt man zusätzlich die Abklingeigenschaft

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) \;=\; 0,$$

so folgt unter Verwendung des Satzes von Liouville, die Eindeutigkeit von u. Um dies zu gewärleisten sollte auch Φ_0 diese Eigenschaft besitzen.

3. Wir zeigen nun, dass Φ_0 rotationsinvariant ist. Ist nähmlich $U \in M(n \times n)$ mit $U^{-1} = U^\top$, so ist $\Phi_0 \circ U$ ebenfalls eine Fundamentallösung von $-\Delta$. Dann ist $v := \Phi_0 - \Phi_0 \circ U$ harmonisch. Nimmt man an, dass $|\Phi_0(x)| \le c|x|^\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$, so folgt,

---

3) Ersetzt man in (3.7) $\varphi(y)$ durch $\varphi(-y)$, so folgt für $x = 0$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(-y)\Delta\varphi(-y)dy \;=\; \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

was gleichbedeutend damit ist, dass Φ_0 eine Distribution ist mit $-\Delta\Phi_0 \;=\; \delta_0$.

wegen $v \in H(\mathbb{R}^n)$, dass $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H(\mathbb{R}^n)$ und beschränkt ist. Aus dem Satz von Liouville ergibt sich $\frac{\partial v}{\partial x_i} = c_0 = \text{const}$, was zeigt, dass $v(x) = a_i x_i + a_0$ für gewisse Konstanten $a_0, \dots, a_n$ ist. Zunächst impliziert $v(0) = 0$, dass $a_0 = 0$. Außerdem impliziert $|v(x)| \leq c|x|^\alpha$, dass $a_i = 0 \ \ (i = 1, \dots, n)$. Somit ist $v = 0$, also Φ_0 rotationsinvariant, d.h. es existiert ein $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\Phi_0(x) = h(|x|)$ □

Sei $\Phi_0(x) = h(|x|)$. Da Φ_0 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist, folgt

$$h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r) = 0 \quad \forall\, r > 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(\log h')' = \frac{1-n}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad h' = C_n r^{1-n}.$$

Nimmt man zusätzlich an, dass $h(r) \to 0$ für $r \to +\infty$, so folgt

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{C_n}{2-n} r^{2-n} & \text{falls} \quad n = 3, \\ C_2 \log r & \text{falls} \quad n = 2. \end{cases}$$

Wir erhalten den folgenden Satz

Satz 3.14 *Die Fundamentallösung Φ_0 für $-\Delta$ ist gegeben durch*

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-2)e_n} |x|^{2-n} & \textit{falls} \quad n = 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \textit{falls} \quad n = 2. \end{cases}$$

Beweis Unter Verwendung der Kettenregel bekommt man

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{n e_n} \frac{x_i}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Für $x \in \partial B_\varepsilon$ bekommt man

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}}(x) = -\frac{1}{n e_n} \frac{x_i}{|x|^n} \frac{x_i}{\varepsilon} = -\frac{1}{|\partial B_\varepsilon|}.$$

Folglich,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}} \varphi \, dS = -\varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in C^0(\mathbb{R}^n).$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{n(n-2)e_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{\varepsilon}{(n-2)|\partial B_\varepsilon|} \quad \forall\, x \in \partial B_\varepsilon$$

falls $n \geq 3$ und

$$\Phi_0(x) \;=\; -\frac{1}{2\pi}\log\varepsilon \quad \forall\, x \in \partial B_\varepsilon,$$

falls $n = 2$. Hiermit ergibt sich

$$\Bigg|\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \Phi_0 \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} dS\Bigg| \leq c\varepsilon \frac{|\partial B_\varepsilon|}{(n-2)|\partial B_\varepsilon|},$$

falls $n \geq 3$ und

$$\Bigg|\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \Phi_0 \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} dS\Bigg| \leq c\frac{2\pi\varepsilon|\log\varepsilon|}{2\pi}.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \Phi_0 \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} dS = 0.$$

Unter Verwendung der zweiten Greenschen Formel berechnet man für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \Phi_0 \Delta\varphi dx = -\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \Big(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}}\varphi - \Phi_0\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) dS.$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$ auf beiden Seiten bekommt man

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_0\Delta\varphi dx \;=\; -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial\Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}}\varphi dS \;=\; \varphi(0).$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Ersetzt man oben φ durch $\phi = \varphi(x - \cdot)$, so folgt

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x-y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(y)\Delta\phi(y)dy \;=\; \phi(0) \;=\; \varphi(x).$$

Also ist Φ_0 eine Fundamentallösung von $-\Delta$. ■

Bemerkung 3.15 1. Wir definieren $\Phi(x, y) := \Phi_0(x - y) = \Phi_0(y - x)$. Wie aus dem obigen Beweis hervorgeht, gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\Phi(x,y)\varphi(y)dS_y \;=\; -\varphi(x) \qquad \forall\,\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n), \tag{3.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(y)dS_y \;=\; 0 \qquad \forall\,\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.9}$$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Sei $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann folgt mithilfe der 2. Greenschen Formel für $x \in \Omega$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \Phi(x,y)\Delta\varphi(y)dy \;=&\\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y) - \Phi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}(y)dS_y\\
&\quad - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y) - \Phi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}(y)dS_y.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von (3.8), (3.9) ergibt sich

$$
(3.10) \qquad -\int\limits_{\Omega} \Phi(x,y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y) - \Phi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}(y)dS_y \;+\; \varphi(x).
$$

Sei $\varphi \in H(\Omega)$. Aus (3.10) folgert man für $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$

$$
(3.11) \qquad \varphi(x) \;=\; \int\limits_{\partial B} \Phi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}(y) - \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \quad \forall\, x \in B.
$$

Da für jedes $y \in \partial B$ sowohl die Funktionen $\Phi(\cdot, y)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}_y}(\cdot, y)\,(y \in \partial B)$ in B analytisch sind, ist auch φ in B analytisch. □

3.6 Klassische Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$

Definition 3.16 Sei $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nichtfallend mit

$$
(3.12) \qquad \int\limits_0^1 \frac{\mu(r)}{r}dr < +\infty.
$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Dini-stetig bezüglich* μ, falls

$$
|f(x) - f(y)| \;\le\; \mu(|x-y|) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.
$$

Bemerkung 3.17 Eine wichtige Eigenschaft der Dini-Stetigkeit ist die folgende: Ist f Dini-stetig bezüglich μ, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$
v(y) = |x-y|^{-n}(f(x) - f(y)), \quad y \in B_1(x)
$$

integrierbar. In der Tat, folgt aus

$$
|v(y)| \;\le\; |x-y|^{-n}\mu(|x-y|), \quad y \in B_1
$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$\int\limits_{B_1(x)} |v(y)|dy \;\le\; ne_n \int\limits_0^1 \frac{\omega(r)}{r} dr < +\infty.$$

$\square$

Abschneidefunktion Sei $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, mit

$$0 \le \eta \le 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}, \quad \eta = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \setminus [-2,2], \quad \eta = 1 \quad \text{auf} \quad [-1,1],$$

so dass

$$|\eta'| \le 2, \quad |\eta''| \le 6 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}.^{4)}$$

Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$\zeta_\varepsilon(x) := \eta\Big(\frac{|x|}{\varepsilon}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\zeta_\varepsilon \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\zeta_\varepsilon) \subset B_{2\varepsilon}$. Unter Verwendung der Kettenregel folgt

$$|\nabla \zeta_\varepsilon| \;\le\; 2\varepsilon^{-1}, \quad |\nabla^2 \zeta_\varepsilon| \le c\varepsilon^{-2} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

Beachtet man $\operatorname{supp}(\nabla\zeta_\varepsilon) \subset B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon$, so ergibt sich

$$|\nabla \zeta_\varepsilon(x)| \;\le\; 4|x|^{-1}, \quad |\nabla^2 \zeta_\varepsilon| \le c|x|^{-2} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

Wir haben nun den folgenden

Satz 3.18 *Sei μ wie in Definition 3.16. Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ Dini-stetig bezüglich μ . Wir setzen*

$$u(x) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $u \in C_B^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} D_iD_j u(x) \;&= \\ &= -\frac{f(x)}{n}\delta_{ij} + \int\limits_{B_1} D_iD_j\Phi_0(y)(f(x-y) - f(x))dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} D_iD_j\Phi_0(y) f(x-y) dy \end{aligned} \tag{3.14}$$

4) Setzen $\eta(r) = -6(r-1)^5 + 15(r-1)^4 - 10(r-1)^3 + 1$ für $r \in [1,2]$ und $\eta(r) = 6(r+1)^5 + 15(r+1)^4 + 10(r+1)^3 + 1$ für $r \in [-1,-2]$. Dann $\eta \in C^2$ mit

$$|\eta'| \;\le\; \frac{15}{8}, \quad |\eta''| \;\le\; \frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Insbesondere ist u eine klassische Lösung der Poisson-Gleichung

$$(3.15) \qquad -\Delta u \,=\, f \quad in \quad \mathbb{R}^n.$$

Beweis Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ Dini-stetig bezüglich μ. Für $0 < \varepsilon < 1/2$, sei $\zeta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Schnittfunktion mit

$$\begin{aligned}
&0 \le \zeta \le 1, \quad \zeta = 1 \quad \text{auf} \quad B_\varepsilon, \quad \operatorname{supp}(\zeta_\varepsilon) \subset B_{2\varepsilon},\\
&|D\zeta_\varepsilon| \le \frac{c}{\varepsilon}, \quad |D^2\zeta_\varepsilon| \le \frac{c}{\varepsilon^2} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\Phi_\varepsilon(x) \,=\, \Phi_0(x)(1 - \zeta_\varepsilon(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \Phi_\varepsilon(0) = 0.$$

$(\Phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$ und definieren

$$u_\varepsilon(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(x-y) f(y)dy \,=\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(y) f(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ist u das Newton-Potential zu f, so findet man wegen $\Phi_0 - \Phi_\varepsilon \,=\, \Phi_0\zeta_\varepsilon$

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \,=\, \left| \int\limits_{B_{2\varepsilon}} \Phi_0(y)\zeta_\varepsilon(y) f(x-y)dy \right| \,\le\, \max|f| \frac{\varepsilon^2}{n(n-2)}.$$

Folglich konvergiert u_ε gleichmäßig gegen u für $\varepsilon \to 0$. Analog zeigt man, dass $D_i u_\varepsilon$ gleichmäßig gegen $D_i u$ $(i = 1, \ldots, n)$ für $\varepsilon \to 0$ konvergiert. Insbesondere ist $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis von (3.14) Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert. Wir definieren

$$w_{ij}(x) \,=\, -f(x)\delta_{ij} + \int\limits_{B_1} D_i D_j \Phi_0 (f(x-y) - f(x))dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} D_i D_j \Phi_0(y) f(x-y)dy,$$

$x \in \mathbb{R}^n$. Aus $\Phi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^n)$ folgt $u_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Wir berechnen unter Verwendung der Transformationsformel

$$D_i D_j u_\varepsilon(x) \,=\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_i D_j \Phi_\varepsilon(y) f(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
D_i D_j u_\varepsilon(x) = &\int\limits_{B_1} D_i D_j \Phi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy - f(x) \int\limits_{B_1} D_i D_j \Phi_\varepsilon dy\\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} D_i D_j \Phi_0(y) f(x-y)dy
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes bekommt man

$$\int_{B_1} D_i D_j \Phi_\varepsilon dy = \int_{\partial B_1} y_i D_j \Phi_\varepsilon dS \;=\; \int_{\partial B_1} y_i D_j \Phi_0 dS \;=\; \frac{1}{ne_n} \int_{\partial B_1} y_i y_j dS = \frac{\delta_{ij}}{n}.$$

Folglich gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$w_{ij}(x) - D_i D_j u_\varepsilon(x) = \int_{B_1} D_i D_j (\Phi_0 \zeta_\varepsilon)(y)(f(x-y) - f(x))dy$$

Mithilfe von (3.13) und der Produktregel folgt leicht

$$|D_i D_j \Phi_0 \zeta_\varepsilon(y)| \;\leq\; c|y|^{-n} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dies impliziert zusammen mit $|f(x-y) - f(x)| \;\leq\; \mu(|y|)$

$$|w_{ij}(x) - D_i D_j u_\varepsilon(x)| \;\leq\; c \int_{B_{2\varepsilon}} |y|^{-n} \mu(|y|)dy \;=\; cne_n \int_0^{2\varepsilon} \frac{\mu(r)}{r} dr.$$

Nach Voraussetzung an μ, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Folglich,

$$D_i D_j u_\varepsilon \to w_{ij} \quad \text{gleichmäßig in } \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dies beweist die Behauptung. Die Gleichung (3.15) folgt sofort aus (3.14), da $\Delta \Phi_0 = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ■

3.7 Die Poisson-Formel

Sei $B = B_1(0)$.

Definition 3.19 Die Funktion $K(x,y) : B \times \partial B \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$K(x,y) \;:=\; \frac{1 - |x|^2}{ne_n} \frac{1}{|x-y|^n}, \quad x \in B, \quad y \in \partial B$$

heißt *Poisson-Kern.*

Satz 3.20 *Der Poisson-Kern besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) $K(\cdot, y) \in H(B) \quad \forall\, y \in \partial B.$

(ii) *Es gilt:*

$$\int_{\partial B} K(x,y) dS_y \;=\; 1 \quad \forall\, x \in B. \tag{3.16}$$

Beweis (i) Sei $y \in \partial B$ fixiert. Da die Funktion $x \mapsto |x-y|^{2-n}$ in B harmonisch ist, sind auch die Funktionen $x \mapsto \dfrac{x_i - y_i}{|x-y|^n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ harmonisch in B. Folglich sind die folgenden Funktionen harmonisch in B

$$
\begin{aligned}
u(x) \; &:= \; \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot y, \\
v(x) \; &:= \; \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot x \; = \; \frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot y, \quad x \in B.
\end{aligned}
$$

Wie man leicht sieht gilt wegen $|y|^2 = 1$:

$$
u(x) + v(x) \; = \; \frac{(x-y)(x+y)}{|x-y|^n} \; = \; \frac{|x|^2 - 1}{|x-y|^n}, \quad \forall\, x \in B.
$$

Somit ist $K(\cdot, y)$ in B harmonisch.
(ii) Wir schreiben

$$
K(x,y) \; = \; -\frac{1}{ne_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot y - \frac{1}{ne_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot x.
$$

Wegen $y = \boldsymbol{n}_y$ und $\dfrac{1}{ne_n} \dfrac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \; = \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i}(x,y)$ folgt unter Verwendung von (3.11) mit $\varphi \equiv 1$

$$
-\frac{1}{ne_n} \int\limits_{\partial B} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot y dS_y \; = \; -\int\limits_{\partial B} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y) dS_y \; = \; 1.
$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$
f(x) := \int\limits_{\partial B} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot x dS_y \; = \; 0 \quad \forall\, x \in B.
$$

Wie oben gezeigt wurde ist die Funktion $x \mapsto \dfrac{x-y}{|x-y|^n} \cdot x$ in B harmonisch. Also ist auch f in B harmonisch. Außerdem bekommt man für eine unitäre Abbildung $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unter Verwendung der Transformationsformel

$$
f(Ux) \; = \; \int\limits_{\partial B} \frac{Ux - y}{|Ux - y|^n} \cdot Ux dS_y \; = \; \int\limits_{\partial B} \frac{x - U^\top y}{|x - U^\top y|^n} \cdot x dS_y \; = \; f(x).
$$

Folglich ist f rotationssymmetrisch. Also gilt $f(x) = C_1 |x|^{2-n} + C_2$. Da aber f in 0 stetig ist und $f(0) = 0$ ist, haben wir $C_1 = C_2 = 0$. Also $f \equiv 0$. ■

Satz 3.21 (**Die Poisson-Formel**) *Sei $\varphi \in C^0(\partial B)$. Dann ist die Funktion*

$$
u(x) \; = \; \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^2}{ne_n} \displaystyle\int\limits_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} dS_y, & x \in B \\[2ex] \varphi(x), & x \in \partial B \end{cases}
$$

harmonisch in B und stetig auf $\overline{B}$.

Beweis Aus Satz 3.20 folgt sofort, dass u in B harmonisch ist. Es bleibt also nur noch die Stetigkeit in den Randpunkten zu zeigen. Sei $x_0 \in \partial B$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da φ stetig ist existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall\, y \in \partial B \cap B_\delta(x_0).$$

Sei $x \in B$ mit $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$. Aufgrund der Eigenschaft (ii) von Satz 3.20 haben wir

$$u(x) - u(x_0) = u(x) - \varphi(x_0) = \int\limits_{\partial B} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dS.$$

Für $y \in \partial B$ mit $|y - x_0| > \delta$ gilt dann $|x - y| \geq \frac{\delta}{2}$. Somit gilt

$$\left| \int\limits_{\partial B, |y-x_0|>\delta} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dS \right| \leq 2(1 - |x|^2)\frac{2^n}{\delta^n} \max_{\partial B} |\varphi|.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\left| \int\limits_{\partial B, |y-x_0|\leq\delta} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dS \right| \leq \varepsilon \int\limits_{\partial B, |y-x_0|\leq\delta} K(x,y)dS = \varepsilon.$$

Wegen $1 - |x|^2 \to 0$ für $x \to x_0$ ergibt sich

$$\limsup_{x \to x_0} |u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt die Behauptung. ∎

Satz 3.22 *Sei $u \in H(\Omega)$, dann gilt für all $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{ne_n R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dS_y \quad \forall\, x \in B_R(x_0) \tag{3.17}$$

Beweis Sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Wir setzen

$$v(\xi) = u(x_0 + R\xi), \quad \xi \in B.$$

Dann $v \in \overline{H}(B)$. Nach Satz 3.21 folgt

$$u(x_0 + R\xi) = v(\xi) = \frac{1 - |\xi|^2}{ne_n} \int\limits_{\partial B} \frac{v(y)}{|\xi - y|^n} dS_y$$

Unter Verwendung der Koordinatentransformation $\xi = \dfrac{x - x_0}{R}$ zusammen mit der Transformationsformel ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x) &= R^n \frac{1 - R^{-2}|x - x_0|^2}{ne_n} \int\limits_{\partial B} \frac{u(x_0 + Ry)}{|x - x_0 - Ry|^n} dS_y \\ &= \frac{R - R^{-1}|x - x_0|^2}{ne_n} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dS_y. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.23 Sei $B_R(x_0)$ eine beliebige Kugel im $\mathbb{R}^n$. Mithilfe der Poisson-Formel haben wir gezeigt, dass für jede stetige Funktion $\varphi \in C^0(\partial B_R(x_0))$ eine Lösung $u \in C^2(B_R(x_0)) \cap C^0(\overline{B}_R(x_0))$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; 0 \quad \text{in} \quad B_R(x_0), \\ \quad u \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial B_R(x_0), \end{cases} \tag{3.18}$$

existiert. Aufgrund des Maximumprinzips/Minimumprinzips ist diese Lösung eindeutig bestimmt. □

3.8 Konvergenzsätze für harmonische Funktionen

Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft sind wir in der Lage die Ableitung einer harmonischen Funktion durch die Funktion selbst abzuschätzen. Dazu die folgende

Proposition 3.24 *Sei $u \in H(\Omega)$. Dann gilt für jeden Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*

$$|D^\alpha u(x)| \;\le\; \Big(\frac{n|\alpha|}{R}\Big)^{|\alpha|} \sup_{B_R(x)} |u|. \tag{3.19}$$

Unmittelbar aus der Mittelwerteigenschaft und dem Gaußschen Integralsatz folgt

$$\begin{aligned} D_i u(x) \;&=\; \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x)} D_i u dy \;=\; \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{\partial B_R(x)} u \nu_i dS \\ &=\; \frac{1}{e_n R^{n+1}} \int\limits_{\partial B_R(x)} u(x_i - x_{0,i}) dS \end{aligned}$$

$(i = 1, \dots, n)$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung bekommt man

$$\begin{aligned} |Du(x)| \;&=\; \frac{1}{e_n R^{n+1}} \Bigg| \int\limits_{\partial B_R(x)} u(x - x_0) dS \Bigg| \;\le\; \frac{1}{e_n R^{n+1}} \int\limits_{\partial B_R(x)} |u||x - x_0| dS \\ &=\; \frac{n e_n R^{n-1}}{e_n R^n} \sup_{B_R(x)} |u| \;=\; \frac{n}{R} \sup_{B_R(x)} |u|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der obigen Ungleichung mittels vollständiger Induktion. ■

Proposition 3.25 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $A \subset \Omega$ nichtleer, so dass für jedes $x \in A$ gilt:*

$$B_R(x) \subset A, \quad \textit{wobei} \quad R \;=\; \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

Dann gilt $A = \Omega$.

Beweis 1° $A \neq \emptyset$.
2° *A ist in Ω relativ offen* Dies ist offensichtlich.
3° *A ist in Ω relativ abgeschlossen* Sei $y \notin A$. Setzen $R := d(y, \partial\Omega)$. Angenommen es gibt ein $x \in B_{R/8}(y) \cap A$. Dann $d(x, \partial\Omega) \geq R - \frac{R}{8} > \frac{R}{2}$. Nach Voraussetzung ist dann $B_{R/8}(x) \subset A$ und insbesondere $y \in A$, was aber $y \notin A$ widerspricht. Folglich ist $\Omega \setminus A$ in Ω relativ offen, also A in Ω relativ abgeschlossen.
Da Ω ein Gebiet ist, muss $A = \Omega$ sein. ∎

Satz 3.26 *Sei $\{u_k\}$ eine Folge in $H(\Omega)$ mit $u_n \leq u_{n+1}$ in Ω für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiere ein $x_0 \in \Omega$, so dass*

$$u_n(x_0) \to y_0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Dann existiert ein $u \in H(\Omega)$, so dass für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und jeden Multi-Index α gilt:

$$D^\alpha u_k \to D^\alpha u \quad \textit{gleichmäßig auf } K \quad \textit{für} \quad k \to +\infty.$$

Beweis Wir setzen $u(x) := \sup_n u_n(x)$ und definieren die Menge

$$A := \{x \in \Omega \, : \, u(x) < +\infty\}.$$

Wegen $x_0 \in A$ ist A nichtleer. Nun sei $x \in A$. Wegen $u(x) < +\infty$ ist $(u_n(x))$ eine Cauchy-Folge. Für $R := \frac{1}{4} d(x, \partial\Omega)$ haben wir $B_{4R}(x) \subset \Omega$. Mithilfe der Harnackschen Ungleichung folgt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$

$$\sup_{B_R(x)} (u_n - u_m) \;\leq\; 3^n \inf_{B_R(x)} (u_n - u_m) \;\leq\; 3^n (u_n(x) - u_m(x)).$$

Dies zeigt, dass $B_R(x) \subset A$. Gemäß Prop. 2.25 folgt $A = \Omega$. Ferner folgt aus dem obigem Beweis, dass u_n auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Also ist $u \in C^0(\Omega)$ und genügt der Mittelwerteigenschaft. Dies zeigt, dass $u \in H(\Omega)$.

Nun sei $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge. Dann existieren $x_i, 0 < R_i < \frac{1}{8} d(x_i, \partial\Omega)$ (i=1,...,N), so dass die Kugeln $B_{R_i}(x_i)$ die Menge K überdecken. Sei α ein beliebiger Multi-Index. Mithilfe von Prop. 2.24 und der Harnackschen Ungleichung bekommt man für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{R_i}(x_i)} |D^\alpha (u - u_n)| \;&\leq\; \Big(\frac{n|\alpha|}{R_i}\Big)^{|\alpha|} \sup_{B_{2R_i}(x_i)} (u - u_n) \\
&\leq\; 3^n \Big(\frac{n|\alpha|}{R_i}\Big)^{|\alpha|} (u(x_i) - u_n(x_i)).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $D^\alpha u_n | K$ gleichmäßig gegen $D^\alpha u | K$ konvergiert. ∎

3.9 Subharmonische Funktionen

Definition 3.27 $u \in C^0(\Omega)$ heißt *subharmonisch* (*superharmonisch*) in Ω, falls für jede Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ gilt:

$$u \leq (\geq) v \quad \text{auf} \quad \overline{B}_R(x_0) \quad \forall\, v \in H(\overline{B}_R(x_0)) \quad \text{mit} \quad u \leq (\geq) v \quad \text{auf} \quad \partial B_R(x_0).$$

Lemma 3.28 *Sei Ω ein Gebiet. Sei $u \in C^0(\Omega)$ mit $\sup_\Omega u < +\infty$, so dass für jedes $x_0 \in \Omega$ ein $0 < R(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ existiert mit*

$$u(x_0) \leq \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx \quad \forall\, 0 < R < R(x_0).$$

Dann genügt u dem starken Maximumprinzip.

Beweis Wir setzen $M := \sup_\Omega u < +\infty$. Wir nehmen an, es existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M$. Dann definieren wir die Menge

$$A := \{x \in \Omega \,|\, u(x) = M\}.$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass $A = \Omega$. Hierbei wird uns wie schon an anderer Stelle der Zusammenhang von Ω helfen.

1° Wegen $x_0 \in A$ haben wir $M \neq \emptyset$.
2° *A ist relativ abgeschlossen in* Ω (wie im Beweis von Satz 3.10).
3° *A ist relativ offen in* Ω Sei $x \in A$. Sei $0 < R < R(x)$. Dann

$$0 = u(x) - M \leq \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x)} (u(y) - M)dy.$$

Wegen $u - M \leq 0$ in $B_R(x)$ folgt $(u - M)|_{B_R(x)} \equiv 0$. Also $B_R(x) \subset A$.
Da Ω zusammenhängend ist, haben wir $A = \Omega$. ∎

Satz 3.29 *Für $u \in C^0(\Omega)$ sind äquivalent:*

1° *u ist subharmonisch in Ω;*

2° *Für jede Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$u(x_0) \leq \frac{1}{n e_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x)dS; \tag{3.20}$$

3° *Für jedes $x_0 \in \Omega$ existiert ein $0 < R(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, so dass*

$$u(x_0) \leq \frac{1}{e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx \quad \forall\, 0 < R < R(x_0). \tag{3.21}$$

Beweis $1° \Rightarrow 2°$ Sei $u \in C^0(\Omega)$ subharmonisch. Sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei $v \in H(\overline{B}_R(x_0))$ Lösung des Dirichlet-Problems (3.18) (mit $\varphi = u$), also $v = u$ auf $\partial B_R(x_0)$. Da u subharmonisch gilt $u \leq v$ in $B_R(x_0)$. Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen bekommt man

$$u(x_0) \leq v(x_0) \;=\; \frac{1}{ne_nR^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} v(x)dS \;=\; \frac{1}{ne_nR^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x)dS.$$

Somit genügt u (3.20).

$2° \Rightarrow 3°$ Folgt sofort aus (3.20) (mit $0 < r < R$ anstelle von R) und Integration beider Seiten über $(0, R)$.

$3° \Rightarrow 1°$ Sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei $v \in \overline{H}(B_R(x_0))$ mit $u \leq v$. Wir definieren $w = u - v$ in $\overline{B}_R(x_0)$. Da v der Mittelwerteigenschaft in $B_R(x_0)$ existiert nach 3° für jedes $x \in B_R(x_0)$ ein $0 < R(x) < \operatorname{dist}(x_0, \partial B_R(x_0))$ mit

$$w(x) \leq \frac{1}{e_n r^n} \int\limits_{B_R(x)} w(y)dy \quad \forall\, 0 < r < R(x).$$

Nach Voraussetzung ist $w \leq 0$ auf $\partial B_R(x_0)$. Somit ergibt sich gemäß Lemma 3.28, dass $w \leq 0$ in $B_R(x_0)$, also $u \leq v$ in $B_R(x_0)$, was zeigt, dass u subharmonisch ist. ∎

Satz 3.30 *Sei Ω ein Gebiet. Sei $u \in C^0(\Omega)$ subharmonisch in Ω mit $\sup u < +\infty$. Dann genügt u dem starken Maximumprinzip.*

Beweis Folgt sofort aus Satz 3.29 zusammen mit Lemma 3.28. ∎

Definition 3.31 Sei u subharmonisch in Ω. Für eine Kugel $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ sei $v_B \in H(\overline{B})$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\Delta v_B = 0 \quad \text{in} \quad \overline{B}, \quad v = u \quad \text{auf} \quad \partial B.$$

Wir definieren

$$u_B(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für} \quad x \in \Omega \setminus B \\ v_B(x) & \text{für} \quad x \in B. \end{cases}$$

Dann heißt u_B der Lift von u bezüglich der Kugel B.

Satz 3.32 *Sei $u \in C^0(\Omega)$ subharmonisch. Für jede Kugel $B \subset\subset \Omega$ ist der Lift u_B wieder subharmonisch.*

Beweis Offensichtlich ist u_B stetig in Ω. Gemäß Satz 3.29 genügt es, (3.20) nachzuweisen. Sei $x_0 \in \Omega$.

1. Fall $x_0 \notin B$: Da u subharmonisch ist, gilt $u \leq u_B$. Ferner existiert ein $0 < R(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, so dass

$$u_B(x_0) = u(x_0) \;\leq\; \frac{1}{ne_nR^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx \;\leq\; \frac{1}{ne_nR^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u_B(x)dx$$

$\forall\, 0 < R < R(x_0)$.

2. Fall $x_0 \in B$: Nach Konstruktion ist $u_B = v_B$ harmonisch in B. Für $R(x_0) := \operatorname{dist}(x_0, \partial B)$ gilt

$$u_B(x_0) = v_B(x_0) \;=\; \frac{1}{n e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u_B(x)dx \quad \forall\, 0 < R < R(x_0).$$

somit genügt u_B der Eigenschaft (3.20). ■

Lemma 3.33 *Seien $u_1, u_2 \in C^0(\Omega)$ subharmonisch in Ω. Dann ist* $\max\{u_1, u_2\}$ *ebenfalls subharmonisch in Ω.*

Beweis Seien u_1, u_2 subharmonisch. Setzen $u := \max\{u_1, u_2\}$. Seien $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Dann haben wir wegen (3.19)

$$u_i(x_0) \;\le\; \frac{1}{n e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u_i(x)dx \;\le\; \frac{1}{n e_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx, \quad i = 1, 2.$$

Folglich genügt u (3.20). Nach Satz 3.26 ist u subharmonisch. ■

3.10 Die Perronsche Methode für subharmonische Funktionen

Wir beginnen unsere Diskussion mit dem Begriff der *Barrierefunktion*

Definition 3.34 1. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Ein $w \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt *Barriere-Funktion in x_0 relativ zu Ω*, falls

(i) w ist subharmonisch in Ω,

(ii) $w < 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $\quad w(x_0) = 0$.

2. Existiert in $x_0 \in \partial\Omega$ eine Barriere-Funktion existiert, so heißt x_0 *regulär.*

Lemma 3.35 *Sei $x_0 \in \partial\Omega$ regulär. Dann existiert für jede Kugel $B = B_r(x_0)$ eine subharmonische Funktion $\widetilde{w} \in C^0(\overline{\Omega})$, so dass*

(i) $\quad 0 \le \widetilde{w} \le 1$ *in* $\overline{\Omega}$,

(ii) $\quad \widetilde{w} \;=\; 0$ *in* $\overline{\Omega} \setminus B \quad \widetilde{w}(x_0) = 1$.

Beweis Sei $w \in C^0(\overline{\Omega})$ eine Barriere-Funktion in x_0. Sei $B = B_r(x_0)$. Setzen $\alpha := \min_{\overline{\Omega}\setminus B}(-w)$ und definieren

$$\widetilde{w} \;=\; \Big(\frac{w}{\alpha} + 1\Big)^+ \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}.$$

Offensichtlich erfüllt $\widetilde{w}$ die gewünschten Eigenschaften. ■

Beispiel Sei Ω ein C^2-Gebiet. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann erfüllt Ω im Punkt x_0 die äußere Kugel-Bedingung, das heßt, es existiert eine Kugel $B_R(y)$, so dass $\overline{B}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Insbesondere, gilt $|x_0 - y| = R$. Wir setzen

$$w(x) = |x-y|^{2-n} - R^{2-n}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Da $w \in H(\Omega)$ mit $w < 0$ in $\Omega \setminus \{x_0\}, w(x_0) = 0$ ist w eine Barriere-Funktion in x_0.

Bezeichnung: Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} A_*(\varphi) &= \Big\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \,\Big|\, u \text{ subharmonisch, } u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega,\ u \geq \min \varphi \text{ in } \Omega \Big\}, \\ A^*(\varphi) &= \Big\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \,\Big|\, u \text{ superharmonisch, } u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega,\ u \leq \max \varphi \text{ in } \Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.36 1. Die konstante Funktion $u \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ liegt offensichtlich in $A_*(\varphi)$. Also ist $A_*(\varphi) \neq \emptyset$. Analog gehört $u \equiv \max_{\partial\Omega} \varphi$ zu $A^*(\varphi)$.
2. Ist $u \in A_*(\varphi)$, so nimmt u sein Maximum auf $\partial\Omega$ an. Folglich gilt

$$\min_{\partial\Omega} \varphi \leq u \leq \max_{\partial\Omega} \varphi \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Analog gilt für $u \in A^*(\varphi)$

$$\min_{\partial\Omega} \varphi \leq u \leq \max_{\partial\Omega} \varphi \quad \text{in} \quad \Omega.$$

3. Seien $u \in A_*(\varphi)$ und $v \in A^*(\varphi)$. Dann ist $-v$ subharmonisch mit $-v \leq -\varphi$ auf $\partial\Omega$. Aus der Definition von $A_*(\varphi)$ folgt $u - v$ ist subharmonisch mit $u - v \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Da $u - v$ sein Maximum auf $\partial\Omega$ annimmt, haben wir $u - v \leq 0$, also $u \leq v$.

Satz 3.37 (**Perron**) *1. Die Funktionen $u_* := \sup_{u \in A_*(\varphi)} u$ und die Funktion $u^* := \sup_{u \in A^*(\varphi)} u$ sind harmonisch und es gilt $u_* \leq u^*$.*
2. Ist $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Punkt, so sind u_* und u^* in x_0 stetig und es gilt:

$$u_*(x_0) = u^*(x_0) = \varphi(x_0).$$

Beweis 1. Sei $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei (u_n) eine Folge in $A_*(\varphi)$ mit

$$u_n(x_0) \to u_*(x_0) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$. Sonst ersetze man u_n durch $\max\{u_1, \ldots, u_n\}$. Sei U_n der Lift von u_n bezüglich B. Wegen $u_n \leq U_n \leq u_*$ folgt

$$U_n(x_0) \to u_*(x_0) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Außerdem haben wir $U_1 \leq U_2 \leq \ldots \leq U_n \leq \ldots$. Nach Satz 3.26 existiert $u \in H(B)$, so dass für jedes $0 < \rho < R$

$$U_n \to u \quad \text{gleichm. in} \quad \overline{B}_\rho(x_0) \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Insbesondere gilt $u(x_0) = u_*(x_0)$. Wir zeigen nun, dass $u = u_*$ in B. Sei $x \in B$. Dann existiert eine Folge $w_n \geq u_n$ in $A_*(\varphi)$, so dass

$$w_n(x_0) \to u_*(x_0), \quad w_n(x) \to u_*(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wie oben können wir annehmen, dass $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$. Nun bezeichne W_n den Lift von w_n bezüglich B. Wegen $w_n \leq W_n$ folgt

$$W_n(x_0) \to u_*(x_0), \quad W_n(x) \to u_*(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wie oben folgt nach Satz 3.26 für jedes $0 < \rho < R$

$$W_n \to w \quad \text{gleichm. in} \quad B_\rho(x_0) \quad \text{für} \quad n \to +\infty,$$

wobei $w \in H(B)$ mit $w(x_0) = u(x_0) = u_*(x_0)$, $w(x) = u_*(x)$ und $u \leq w$ in B. Nach Lemma 3.11 ist $u = w$, also $u(x) = w(x) = u_*(x)$. Somit ist u_* in Ω harmonisch.

2. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Punkt. Wir zeigen $u_*(x_0) = u^*(x_0) = \varphi(x_0)$. Sei $u \in A_*(\varphi)$ mit $u(x_0) < \varphi(x_0)$. Sei $0 < \varepsilon < \varphi(x_0) - u(x_0)$. Aufgrund der Stetigkeit von φ und u existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$u(x) + \varphi(x_0) - u(x_0) - \varepsilon \leq \varphi(x) \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega.$$

Gemäß Lemma 3.35 existiert eine subharmonische Funktion $\widetilde{w} \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $0 \leq \widetilde{w} \leq 1$ auf $\overline{\Omega}$, $\widetilde{w} = 0$ in $\overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0)$ und $\widetilde{w}(x_0) = 1$. Dann ist

$$\widetilde{u} = u + (\varphi(x_0) - u(x_0) - \varepsilon)\widetilde{w} \leq \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Dann ist $\max\{\widetilde{u}, \min\varphi\} \in A_*(\varphi)$. Wegen $\widetilde{u}(x_0) = \varphi(x_0) - \varepsilon$ schließt man $u_*(x_0) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon$, was $u_*(x_0) = \varphi(x_0)$ impliziert. Analog zeigt man $u^*(x_0) = \varphi(x_0)$.

Stetigkeit von in x_0. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $u \in A_*(\varphi)$ und $v \in A^*(\varphi)$, so dass

$$u(x_0) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon, \quad v(x_0) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Ferner gilt

$$v(x_0) - u(x_0) \;\leq\; 2\varepsilon.$$

Aufgrund der Stetigkeit von u und v existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon, \quad |v(x) - v(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0) \cap \overline{\Omega}.$$

Sei $U \in A_*(\varphi)$ mit $U \geq u$ in $\overline{\Omega}$. Sei $x \in B_\delta(x_0) \cap \overline{\Omega}$. Wegen $U \leq v$ haben wir

$$\begin{aligned} |u(x_0) - U(x)| \;&\leq\; |u(x_0) - u(x)| \;+\; U(x) - u(x) \leq \varepsilon + v(x) - u(x) \\ &\leq\; \varepsilon + |v(x) - v(x_0)| + v(x_0) - u(x_0) + |u(x_0) - u(x)| \\ &\leq\; 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$|\varphi(x_0) - U(x)| \leq \varphi(x_0) - u(x_0) \;+\; |u(x_0) - U(x)| \;\leq\; \varepsilon \;+\; 5\varepsilon \leq 6\varepsilon.$$

Folglich ist $|\varphi(x_0) - u_*(x)| \leq 6\varepsilon$ für alle $x \in B_\delta(x_0) \cap \overline{\Omega}$. Analog zeigt man die Stetigkeit von u^* in x_0. ∎

Folgerung 2.38 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so dass jeder Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ regulär ist. Dann existiert für jedes $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ genau ein $u \in \overline{H}(\Omega)$ mit*

$$u \;=\; \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Beweis Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Sei $u_* = \sup_{u \in A_*(\varphi)}$. Nach Satz 3.36 ist u_* harmonisch in Ω. Da jeder Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Punkt ist, folgt nach Satz 3.37 /2, dass u_* auf $\overline{\Omega}$ stetig ist mit $u_*(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$. Somit ist $u_* \in \overline{H}(\Omega)$ und erfüllt Randbedingung. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus dem Maximumprinzip/Minimumprinzip. ∎

3.11 Weylsches Lemma und hebbare Singularitäten

Lemma 3.39 (**Weylsches Lemma**) *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega u \Delta\phi dx \;=\; 0 \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dann existiert eine harmonische Funktion $\widetilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ so dass

$$u \;=\; \widetilde{u} \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Beweis Siehe Hompage. Idee: Sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Glätten u mit radialsymmetrischen Glättungskern.

$$u_\varepsilon \;=\; u * \rho_\varepsilon \quad \text{in} \quad B_R(x_0)$$

Dann ist u_ε in $B_R(x_0)$ harmonisch. Aus der Mittelwerteigenschaft schließt man

$$u * \rho_\varepsilon \;=\; u * \rho_\varepsilon * \rho_\delta \;=\; u * \rho_\delta * \rho_\varepsilon \;=\; u * \rho_\delta \quad \forall\, 0 < \varepsilon, \delta < \frac{1}{2}(\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) - R).$$

Wegen $u_\delta \to u$ in $L^1(B_R(x_0))$ folgt $u = u_\varepsilon$ fast überall in $B_R(x_0)$. ∎

Satz 3.40 *Sei $x_0 \in \Omega$. Sei $u \in H(\Omega \setminus \{x_0\})$, so dass*

$$|u(x)| \;\leq\; c_0 |x - x_0|^{-\alpha} \quad \forall\, x \in B_{\frac{R_0}{2}}(x_0) \quad (R_0 := \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)),$$

wobei $c_0 = \text{const} > 0$ *und* $0 \leq \alpha < n-2$. *Dann existiert ein* $a \in \mathbb{R}$*, so dass die Funktion*

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{\textit{für}} \quad x \neq x_0, \\ a & \text{\textit{für}} \quad x = x_0, \end{cases}$$

in Ω *harmonisch ist.*

Beweis Sei $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Wir setzen $R := |x - x_0|$. Unter Verwendung von (3.19) schließt man

$$|Du(x)| \leq \frac{c}{R} \sup_{B_{R/2}} |u| \leq c|x - x_0|^{-\alpha-1}.$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei $0 < \varepsilon < R_0$. Mithilfe der zweiten Greenschen Formel zusammen mit der obigen Abschätzung findet man

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} u\Delta\phi dx &= -\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\phi dS \\
&= c\int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} |x - x_0|^{-\alpha} dS + c\int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} |x - x_0|^{-\alpha-1} dS \\
&\leq c(\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-\alpha} + \varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-\alpha-1}) \leq c\varepsilon^{n-2-\alpha}.
\end{aligned}$$

Wegen $n - 2 - \alpha > 0$ konvergiert die rechte Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 . Beachtet man außerdem, dass $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so ergibt sich

$$\int\limits_\Omega u\Delta\phi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} u\Delta\phi dx = 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus dem Weylschen Lemma. ■

3.12 Greensche Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.22}$$

$$u = \varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \tag{3.23}$$

Motivation für die Konstruktion einer Greenschen Funktion: Ähnlich wie im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$, wollen wir die eindeutig bestimmte Lösung u in der folgenden Form schreiben

$$u(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y)dy - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y, \quad x \in \Omega \tag{3.24}$$

mit einer geeigneten Kernfunktion G. Für jedes $x \in \Omega$ müsste somit $G(x,\cdot) \in L^1(\Omega)$ sein und es müsste die folgende Integralidentität erfüllt sein

$$-\int_{\Omega} G(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,=\, \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \,+\, \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{3.25}$$

Wir erinnern nun, dass $\Phi(x,y)$ der Identität

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Phi(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,&=\\ =\, -\int_{\partial\Omega} \Phi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \,&+\, \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

genügt. Setzt man also $H(x,y) \,=\, G(x,y) - \Phi(x,y)$ so genügt $H(x,y)$ der Identität

$$\int_{\Omega} H(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,=\, 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Aus dem Weylschen Lemma (siehe Lemma 3.39), folgert man, dass $H(x,\cdot) \in H(\Omega)$, also in Ω harmonisch ist. Unter Verwendung der 2. Greenschen Formel sowie den Identitäten (3.25) und (3.26) findet man

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} G(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}(y) - \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \,=\\ &=\int_{\partial\Omega} H(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}(y) - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \,+\, \int_{\partial\Omega} \Phi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y\\ &=\int_{\Omega} H(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,+\, \int_{\Omega} \Phi(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,+\, \varphi(x)\\ &=\int_{\Omega} G(x,y)\Delta\varphi(y)dy \,+\, \varphi(x)\\ &=-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dy. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dies impliziert

$$\int_{\partial\Omega} G(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}}(y)dS_y \,=\, 0 \quad \forall\, \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen ergibt sich

$$G(x,\cdot) \,=\, 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Übung: *Sei* $f : \partial B \to \mathbb{R}$ *stetig mit*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} dS_y \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ *auf* ∂B *ist.* [*Hinweis*: Betrachten Sie Polynome der Gestalt: $\lambda x_1^{k+2} + x_1^k x_2^2 + \cdots x_1^k x_n^2$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$ und wenden Sie den Approximationssatz von Weierstrass an.]

Wir geben somit die folgende Definition der Greenschen Funktion.

Definition 3.41 (**Greensche Funktion**) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres, beschränktes Gebiet. Eine stetig differenzierbare Funktion $G = G_{-\Delta,\Omega} : \Omega \times \overline{\Omega} \setminus \mathrm{diag} \to \mathbb{R}$, wobei

$$\mathrm{diag} \;=\; \{(x,x) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \mathbb{R}^n\}$$

heißt *Greensche Funktion des Operators* $-\Delta$ *für* Ω, falls

(i) Für jedes $x \in \Omega$ gilt $G(x,\cdot) \in L^1(\Omega)$ mit (3.25), d.h.

$$-\int\limits_\Omega G(x,y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; -\int\limits_\Omega \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y + \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

(ii) $\quad G(x,\cdot) \;=\; 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad \forall\, x \in \Omega.$

Bemerkung 3.42 Manchmal ist es sinnvoll vorauszusetzen, dass G auf $\Omega \times \overline{\Omega} \setminus \mathrm{diag}$ nur stetig ist. Dann heißt G Greensche Funktion, falls neben (ii) anstelle von (3.25) nur gilt:

$$-\int\limits_\Omega G(x,y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.28}$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Greenschen Funktion enthält der folgende Satz.

Satz 3.43 *Ist* G *eine Greensche Funktion von* $-\Delta$ *für* Ω*. Dann genügt* G *den folgenden Eigenschaften:*

1. $G(x,\cdot) \in H(\Omega \setminus \{x\})$ *für jedes* $x \in \Omega$*.*

2. Positivität: G *ist strikt positiv in* $\Omega \times \Omega \setminus \mathrm{diag}$ *und* $-\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,\cdot)$ *ist strikt positiv auf* $\partial\Omega$ *für alle* $x \in \Omega$*.*

3. Symmetrie: G *ist symmetrisch, d.h.*

$$G(x,y) \;=\; G(y,x) \quad \forall\, (x,y) \in \Omega \times \Omega \setminus \mathrm{diag} \tag{3.29}$$

Beweis 1. Sei $x \in \Omega$. Unmittelbar aus (3.25) folgt

$$\int\limits_\Omega G(x,y)\Delta\varphi(y)dy \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega \setminus \{x\}).$$

Die Behauptung folgt nunmehr aus dem Weylschen Lemma.

2. Positivität. Sei $x \in \Omega$ fixiert. Wir schreiben $G(x,\cdot) = \Phi(x,\cdot) + H(x,\cdot)$, wobei $H(x,\cdot) \in \overline{H}(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} -\Delta H(x,\cdot) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \partial\Omega, \\ H(x,\cdot) \;=\; -\Phi(x,\cdot) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(Siehe auch Motivation oben). Aus der Definition von Φ folgt

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{n(n-2)e_n\varepsilon^{n-2}} \quad \forall\, y \in \partial B_\varepsilon(x) \quad \forall\, 0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

Man wähle $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$, so dass

$$\Phi(x,y) \geq -H(x,y) + 1 \quad \forall\, y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

was bedeutet, dass $G(x,\cdot) \geq 1$ auf $\partial B_\varepsilon(x)$. Wie bereits bewiesen haben wir

$$\Delta G(x,\cdot) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon.$$

Wäre $G(x,y_0) \leq 0$ für ein $y_0 \in \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, so müsste nach dem starken Minimum-Prinzip $G(x,\cdot) \equiv G(x,y_0) \leq 0$ sein, was aber ein Widerspruch zu $G(y,\cdot) \geq 1$ auf $\partial B_\varepsilon(x)$ ist.

Aus dem Hopfschen Maximumprinzip folgt $-\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \Omega \times \partial\Omega$.

3. Symmetrie Seien $x, z \in \Omega$. Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\{\min|x-z|, \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)\}$. Mithilfe partieller Integration findet man

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega\setminus(B_\varepsilon(x)\cup B_\varepsilon(x)} \nabla G(x,y)\cdot\nabla G(z,y)dy \\ &\quad = -\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)G(z,y)dS_y \nabla G(z,y)dy - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)G(z,y)dS_y. \end{aligned}$$

Offensichtlich konvergiert das zweite Integral gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Mithilfe von (2.8) bekommt man

$$\begin{aligned} &-\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)G(z,y)dS_y \\ &\quad = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)G(z,y)dS_y - \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)G(z,y)dS_y \\ &\quad = G(z,x) + 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int\limits_{\Omega} \nabla G(x,y)\cdot\nabla G(z,y)dy \;=\; G(z,x) = G(x,z),$$

was die Symmetrie beweist. ∎

Beispiel 2.44 Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B = B_1(0)$: Um die Greensche Funktion zu bestimmen, genügt es das folgende Dirichlet-Problem zu lösen

$$(3.30) \qquad \Delta H(x,\cdot) \;=\; 0, \quad H(x,\cdot) \;=\; -\frac{1}{n(n-2)e_n}|x-\cdot|^{2-n} \quad \text{auf} \quad \partial B_1$$

Hierfür eignet sich die **Kelvin-Transformation** Tu definiert durch

$$(Tu)(y) \;=\; |y|^{2-n}u\Big(\frac{y}{|y|^2}\Big), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Nach Ü.? haben wir für

$$\Delta Tu \;=\; |y|^{-(n+2)}(\Delta u) \circ \boldsymbol{F},$$

wobei $\boldsymbol{F}(y) \;=\; \dfrac{y}{|y|^2}$ die Möbiustransformation ist. Wir sehen also, dass

$$Tu \quad \text{harmonisch} \quad \Longleftrightarrow \quad u \quad \text{harmonisch.}$$

Außerdem

$$Tu \;=\; u \quad \text{auf} \quad \partial B.$$

Sei $x \in B$. Setzen $u(y) \;=\; \Phi(x,y)$ für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Dann ist u harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$. Folglich ist Tu harmonisch in $B \setminus \{0\}$ mit $Tu \;=\; \Phi(x,\cdot)$ auf ∂B. Wir erhalten somit

$$Tu(y) \;=\; |y|^{2-n}\frac{1}{n(n-2)e_n}\left|x - \frac{y}{|y|^2}\right|^{2-n} \;=\; \frac{1}{n(n-2)e_n}\left|\frac{y}{|y|} - |y|x\right|^{2-n}.$$

Da Tu in $B \setminus \{0\}$ beschränkt ist, hat diese Funktion in 0 eine hebbare Singularität. Somit ist die Funktion

$$H(x,y) := \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n-2)e_n}\left|\dfrac{y}{|y|} - |y|x\right|^{2-n} & \text{falls} \quad y \in \overline{B} \setminus \{0\}, \\ -\dfrac{1}{n(n-2)e_n} & \text{falls} \quad y = 0 \end{cases}$$

harmonisch in B mit $H(x,\cdot) = -\Phi(x,\cdot)$ auf ∂B. Wir definieren

$$G(x,y) \;=\; \Phi(x,y) \;+\; H(x,y) \quad (x,y) \in B \times \overline{B} \setminus \text{diag}.$$

Es ist unmittelbar klar, dass G stetig differenzierbar ist, mit $G(x,\cdot) \in L^1(B)$, harmonisch in $\overline{B} \setminus \{x\}$ und $G(x,\cdot) = 0$ auf ∂B. Folglich haben wir nach (3.26) die Identität (3.25) (siehe Definition 3.39). Also ist G die Greensche Funktion für B.

Den Poisson-Kern erhält man aus

$$K(x,y) \;=\; -\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y), \quad x \in B, y \in \partial B.$$

Seien $x \in B$ und $y \in \partial B$. Für $i = 1, \dots, n$ berechnet man

$$\begin{aligned} -ne_n D_i G &= -\frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} + \frac{x_k - y_k}{|x-y|^n}(\delta_{ki} - y_k y_i - y_i x_k). \\ &= \frac{y_k - x_k}{|x-y|^n}(y_k + x_k) y_i \\ &= \frac{(1-|x|^2) y_i}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$K(x,y) = \frac{1-|x|^2}{ne_n} \frac{1}{|x-y|^n}, \quad (x,y) \in B \times \partial B.$$

Weitere Eigenschaften Greenscher Funktionen.

Satz 3.45 *Sei $G = G_{-\Delta,\Omega}$ Greensche Funktion. Sei $f \in L^\infty(\Omega)$. Wir definieren*

$$u(x) := \int_\Omega G(x,y) f(y) dy, \quad x \in \overline{\Omega}$$

Dann gilt $u \in C^0(\overline{\Omega})$ mit

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Beweis $G(x,y) = \Phi(x,y) + H(x,y)$, wobei $H(x,\cdot) \in \overline{H}(\Omega)$ mit $H(x,\cdot) = -\Phi(x,\cdot)$ auf $\partial\Omega$. Aus dem Maximumprinzip/Minimumprinzip folgt

$$0 \le -H(x,y) \le \max_{\partial\Omega} \Phi(x,\cdot)$$

Insbesondere, gilt:

$$0 < G(x,y) \le \Phi(x,y) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \mathrm{diag}.$$

Nun sei $x \in \overline{\Omega}$ beliebig gewählt. Sei $x_n \in \overline{\Omega}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Sei $y \in \Omega$. Dann folgt aus der Stetigkeit von $G(\cdot, y)$

$$G(x_n, y) \to G(x,y) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\Phi(x_n, \cdot) \to \Phi(x, \cdot) \quad \text{in} \quad L^1(\Omega) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Nach einer Version des Konvergenzsatzes von Lebesgue folgt

$$G(x_n, \cdot) f \to G(x, \cdot) f \quad \text{in} \quad L^1(\Omega) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Folglich gilt:

$$u(x_n) \to u(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Insbesondere, haben wir $G(x,y) = G(y,x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Folglich gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. ∎

Satz 3.46 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet mit Greenscher Funktion $G = G_{-\Delta,\Omega}$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ Dini-stetig. Dann ist die Funktion*

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy, \quad x \in \overline{\Omega}$$

in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Beweis Wie bereits bewiesen gilt $u \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $u \in C^2(\Omega)$ und der Gleichung $-\Delta u = f$ genügt. Hierfür sei $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ eine beliebige Kugel. Sei $\psi \in C_0^\infty(B_R)$ mit $\psi \equiv 1$ auf $B_{R/2}$. Dann haben wir $u = u_1 + u_2 + u_3$, wobei

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_\Omega \Phi(x,y)\psi(y) f(y) dy \\ u_2(x) &= \int_\Omega H(x,y)\psi(y) f(y) dy \\ u_3(x) &= \int_\Omega G(x,y)(1-\psi(y)) f(y) dy, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Da ψf Dini-stetig ist, folgt nach Satz 3.18 $u_1 \in C^2(\Omega)$ mit

$$-\Delta u_1 = \psi f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Für jedes $y \in B_R$ ist $x \mapsto H(x,y)$ in B_R harmonisch mit

$$0 \le -H(x,y) < \frac{1}{n(n-2)e_n} \max_{\xi \in \partial\Omega} |y-\xi|^{2-n} \le \frac{1}{n(n-2)e_n} \operatorname{dist}(B_R, \partial\Omega)^{2-n}.$$

Folglich ist u_2 in B_R harmonisch. Schließlich haben wir $\operatorname{supp}(1-\psi) \subset \Omega \setminus B_{R/2}$. Somit ist

$$u_3(x) = \int_{\Omega \setminus B_{R/2}} G(x,y)(1-\psi(y)) f(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Wegen $0 < G(x,y) < \Phi(x,y) \le \frac{4^{n-2}}{n(n-2)e_n} R^{2-n} \; \forall x \in B_{R/4}, y \in \Omega \setminus B_{R/2}$ und $G(\cdot, y)$ harmonisch in $B_{R/4}$ für alle $y \in \Omega \setminus B_{R/2}$ folgt $-\Delta u_3 = 0$. Dies zeigt, dass $u|_{B_{R/4}} \in C^2(B_{R/4})$ mit $-\Delta u = f$ in $B_{R/4}$. ∎

Satz 3.47 *Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann ist die Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} -\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y & \textit{falls} \quad x \in \Omega \\ \varphi(x) & \textit{falls} \quad x \in \Omega \end{cases}$$

in $\overline{H}(\Omega)$, d.h. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ist Lösung des Dirichlet-Problem

$$-\Delta u \;=\; 0, \quad u_{\partial\Omega} \;=\; \varphi.$$

Einschub: Mittelfunktionen Wir definieren

$$\rho_1(x) := \begin{cases} c_0 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{für} \quad x \in B_1 \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1 \end{cases}$$

Wobei $c_0 = \text{const} > 0$, so gewählt ist, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_1 dx \;=\; 1.$$

Ferner setzen wir $\varphi_\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$. Dann haben wir $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx \;=\; 1.$$

Sei $f \in L^1\Omega$. Wir definieren die Friedrichsche Glättung f_ε durch

$$f_\varepsilon(x) \;=\; f * \rho_\varepsilon \;=\; \int\limits_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy, \quad x \in \Omega.$$

Unter Verwendung der Stetigkeit im Mittel bekommt man

Lemma *1. Sei $f \in L^p(\Omega)\,(1 \le p < \infty)$. Dann*

$$f_\varepsilon \to f \quad \textit{in} \quad L^p(\Omega) \quad \textit{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

2. Ist $f \in C^0(\overline{\Omega})$ so gilt

$$f_\varepsilon \to f \quad \textit{gleichm. auf}\, \overline{\Omega} \quad \textit{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

Beweis von Satz 3.47 Zunächst sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$v(x) := \int_\Omega G(x,y)\Delta\varphi(y)dy, \quad x \in \overline{\Omega}$$

Aus der Definition der Greenschen Funktion folgt

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \;=\; -v(x) \;+\; \varphi(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Gemäß Satz 3.46 erhalten wir $\Delta v = \Delta\varphi$, also $\Delta u = 0$ und $v|_{\partial\Omega} = 0$, also $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Ferner folgt aus dem Max/Min-Prinzip, dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \;\le\; \max_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Nun sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ beliebig gewählt. Unter Verwendung des Ausdehnungsatzes von Tietze-Uryson findet man eine Funktion $\widetilde{\varphi} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega} \;=\; \varphi$. Wir definieren die Glattung

$$\varphi_m(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(x-y)\rho_{1/m}(y)dy \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi_m \to \widetilde{\varphi} \quad \text{gleichm. in } \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Definiert man u_m wie oben, so ist $u_m \in \overline{H}(\Omega)$ mit $u_m|_{\partial\Omega} = \varphi_m$. Für $m, l \in \mathbb{N}$ folgt

$$\|u_m - u_l\|_{\infty,\overline{\Omega}} \;\le\; \|\varphi_m - \varphi_l\|_{\infty,\partial\Omega} \to 0 \quad \text{für} \quad m, l \to \infty.$$

Somit konvergiert u_m gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen eine harmonische Funktion $w \in \overline{H}(\Omega)$. Wegen

$$u_m|_{\partial\Omega} \;=\; \varphi_m \to \varphi \quad \text{gleichm. auf } \partial\Omega \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$

egibt sich

$$w(x) \;=\; -\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi_m(y)dS_y \;=\; -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_y}(x,y)\varphi(y)dS_y \;=\; u(x),$$
$$w(x) \;=\; \varphi(x) = u(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

was die Behauptung beweist. ■

Aus Satz 3.46 und Satz 3.47 ergibt sich das folgende klassische Existenzresultat

Satz 3.48 *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet. Für jede Dini-stetige Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und für jedes $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u \;=\; f \quad \textit{in} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} \;=\; \varphi.$$

Existiert außerdem eine Greensche Funktion $G = G_{-\Delta,\Omega}$, so hat u die Darstellung

$$u(x) \;=\; \begin{cases} \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dy - \int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)\varphi(y)dS_y, & \textit{falls} \quad x \in \Omega, \\ \varphi(x), & \textit{falls} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$