Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2012/2013

Jörg Wolf [1)]

Contents

4 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit elliptischen Problemen der Form

$$(4.1) \qquad Lu = -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

wobei

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist.

Nimmt man an, dass die Koeffizienten a_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ und $\boldsymbol{f}$ nicht differenzierbar sind, so stellt sich die Frage was unter einer Lösung von (4.1) zu verstehen ist. Dies führt

[1)] JGU Mainz, Institut für Mathematik, FB 08, Staudinger Weg 9, E-Mail: wolfj@uni-mainz.de.

zu dem Begriff der "schwachen Lösung". In disesem Fall können wir nicht erwarten, dass die Gleichung (4.1) "punktweise erfüllt" ist. Allerdings werden wir sehen, dass (4.1) im "Distributionensinne" bzw. "schwachem Sinne" erfüllt ist. Das heißt, es gilt die folgende Integralidentität

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + cu\varphi dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wie man aus der obigen Identität erkennt, ist hierbei nur erforderlich, dass u und die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zu $L^p(\Omega)$ für ein $p \geq 1$ gehören. Hieraus ergibt sich die Motivation den Begriff der Differenzierbarkeit abzuschwächen, was in dem nächsten Abschnitt erläutert wird.

4.1 Schwache Ableitung und Soboleväume

Definition 4.1 Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Eine Funktion $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ heißt *i-te schwache Ableitung* von u $\quad (i \in \{1, \ldots, n\})$, falls

$$\int_\Omega v\varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Die Funktion v wird dann mit $D_i u$ bezeichnet.

Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multi-Index. Eine Funktion $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ heißt *α-te schwache Ableitung* von u, falls

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Die α-te schwache Ableitung von u ezeichnen wir mit $D^\alpha u$.

Bemerkung 4.2 1. Die schwachen Ableitungen sind als L^1-Funktionen eindeutig bestimmt. Dies folgt sofort aus dem folgenden

Fundamentallemma der Variationsrechnung *Sei $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega v\varphi dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $\varphi = 0$ fast überall in Ω.

2. Ist u in Ω differenzierbar, so ist die i-te partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ gleich der i-ten schwachen Ableitung $D_i u$. In der Tat, sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist $u\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Wir setzen diese Funktion auf einen Würfel $Q_R(0) \supset \operatorname{supp}(\varphi)$ fort und erhalten unter Verwendung der Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \chi_{\operatorname{supp} \varphi} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \chi_{\operatorname{supp}(\varphi)} \quad \text{in} \quad Q_R(0).$$

Mithilfe von Satz 1.1 findet man

$$0 = \int\limits_{Q_R} \frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi)dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx + \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.$$

Dies zeigt $\frac{\partial u}{\partial x_i} = D_i u$.

Beispiel 4.3 Wir betrachten die Funktion

$$u(x) \;=\; |x|, \quad x \in (-1,1).$$

Die schwache Ableitung u' ist die Funktion

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 0, \end{cases}$$

Beweis Sei $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$. Unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} -\int\limits_{-1}^{1} |x|\varphi' dx \;&=\; \int\limits_{-1}^{0} x\varphi' dx - \int\limits_{0}^{1} x\varphi' dx \\ &=\; -\int\limits_{-1}^{0} \varphi dx + \int\limits_{0}^{1} \varphi dx \;=\; \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}(x)\varphi dx. \end{aligned}$$

Definition 4.4 (**Sobolevraum**) Für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ definieren wir den *Sobolevraum*

$$W^{m,p}(\Omega) \;=\; \{u \in L^p(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall\, |\alpha| \le m\}.$$

Wir versehen diesen Raum mit der folgenden Norm

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \;=\; \Big(\sum\limits_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} & \text{falls} \quad 1 \le p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \;=\; \max\limits_{|\alpha|\le m} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\Omega} |D^\alpha u| & \text{falls} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 4.5 Da die 0-te Ableitung von u die Funktion u selbst ist, stimmt der Raum $W^{0,p}(\Omega)$ mit $L^p(\Omega)$ überein. Wir schreiben somit immer $L^p(\Omega)$ anstatt $W^{0,p}(\Omega)$.

Beispiel 4.6 1) $u(x) = |x|\,(x \in (-1,1))$ gehört zu $W^{1,\infty}((-1,1))$.

2) $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^2, u(x) = |x|^{-\alpha}\,(0 < \alpha < 1)$. Dann $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für alle $1 \le p < \dfrac{2}{\alpha+1}$.

Satz 4.7 *Der Raum $W^{m,p}(\Omega)\,(m \in \mathbb{N})$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ ist ein Banachraum.*

Beweis Sei (u_m) eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. Unmittelbar aus der Definition der Norm in $W^{m,p}(\Omega)$ folgt, dass $\{D^\alpha u_m\}$ für jedes $|\alpha| \leq m$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ ist. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existieren $v_\alpha \in L^p(\Omega)\,(|\alpha| \leq m)$, so dass

$$D^\alpha u_m \to v_\alpha \quad \text{in} \quad L^p(\Omega) \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$

Aus der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ folgt insbesondere $v_{(0,\ldots,0)} = u$. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, aber fixiert. Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $0 < |\alpha| \leq m$. Dann folgt aus der Definition der α-ten schwachen Ableitung von u in Ω, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega v_\alpha \varphi dx &= \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $v_\alpha = D^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$. Insbesondere gilt:

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W^{m,p}(\Omega) \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$

■

Satz 4.8 (**Meyers, Serrin '64**) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W_p^m(\Omega)$.*

Als Vorbereitung dient das folgende Lemma

Lemma 4.9 *Sei $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Dann $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\,(\varepsilon > 0)$ [2] und es gilt:*

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in} \quad W^{m,p}(\Omega) \quad \textit{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

Beweis Sei $|\alpha| \leq m$. Aus den Eigenschaften der Faltung und der Definition der schwachen Ableitung folgt für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon D^\alpha \varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u * \rho_\varepsilon D^\alpha \varphi dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u D^\alpha (\varphi * \rho_\varepsilon) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u) \varphi * \rho_\varepsilon dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u)_\varepsilon \varphi dx.
\end{aligned}$$

[2] Hier bezeichne $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}x)$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx = 1$ den Friedrichs'schen Glättungskern und $u * \rho_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$ die Faltung von u mit ρ_ε.

Dies zeigt dass $(D^\alpha u)_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die α-te schwache Ableitung von u_ε in $\mathbb{R}^n$ ist. Außerdem haben wir

$$(D^\alpha u)_\varepsilon \to D^\alpha u \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall\, |\alpha| \le m.$$

Dies bestätigt die Behauptung des Lemmas. ■

Beweis von Satz 4.8 Sei $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine lokal endliche Familie offener Mengen mit

$$\overline{U}_k \subset \Omega; \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = \Omega.$$

Sei $\{\psi_k\}$ eine $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, das heißt

(i) $\psi_k \in C_0^\infty(U_k)$ mit $0 \le \psi_k \le 1$ in U_k $(k \in \mathbb{N})$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k \;=\; 1$ [3].

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$, existiert gemäß Lemma 4.9 ein $0 < \delta_k < \min\{\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\psi_m), \partial\Omega), 2^{-k}\}$, so dass

$$\|\psi_k u - (\psi_k u)_{\delta_k}\|_{W^{m,p}(\Omega)} \;\le\; 2^{-k}\varepsilon.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\Big\| u - \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k u)_{\delta_k} \Big\|_{W^{m,p}(\Omega)} \;&=\; \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k u - (\psi_k u)_{\delta_k}) \Big\|_{W^{m,p}(\Omega)} \\ &\le\; \sum_{m=1}^{\infty} \|\psi_k u - (\psi_k u)_{\delta_k}\|_{W_p^m(\Omega)} \;\le\; \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit gehört die Funktion $u_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\psi_k u)_{\delta_k}$ zu $W^{m,p}(\Omega)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Hierfür sei $B_{2R} \subset\subset \Omega$. Da $\overline{B}_{2R}$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\{U_1, \ldots, U_N\}$ eine Überdeckung von $\overline{B}_{2R}$ ist. Da die Familie $\{U_k\}$ lokal endlich ist, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $l \in \mathbb{N}$, so dass $U_k \cap U_l \neq \emptyset$. Somit existiert ein $L \in \mathbb{N}$, derart, dass $U_k \cap \overline{B}_{2R} = \emptyset$ für alle $k > L$. Außerdem können wir L so groß wählen, dass $\delta_L \le R$, so dass $\mathrm{supp}(\psi_k u)_{\delta_k} \cap B_R = \emptyset$ für alle $k > L$. Dies zeigt, dass

$$u_\varepsilon \;=\; \sum_{m=1}^{L} (\psi_k u)_{\delta_k} \quad \text{in} \quad B_R.$$

Also ist u_ε in B_R als endliche Summe von C^∞-Funktionen enbenfalls eine C^∞-Funktion.

[3] Beachte dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ in der Summe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$ außer endlich viele $k \in \mathbb{N}$ der Wert $\psi_k(x)$ gleich 0 ist, da $\{U_k\}$ lokal endlich ist.

∎

Satz 4.10 *Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^m-Rand. Für jedes $1 \le p < \infty$, existiert ein Fortsetzungsoperator $E : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, so dass*

$$\begin{aligned} Eu|_{\Omega} &= u, \\ \|Eu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &\le c\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall\, u \in W^{m,p}(\Omega), \end{aligned}$$

wobei $c = c(m, p, \Omega)$
(vgl. Adams. *Sobolevräume*).

Folgerung 4.11 *Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^m-Rand. Der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ für jedes $1 \le p < +\infty$.*

Beweis. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Sei Eu die Fortsetzung von u gemäß Satz 4.10

$$\|(Eu)_\tau - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le \|(Eu)_\tau - Eu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für} \quad \tau \to 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus $(Eu)_\tau|_{\overline{\Omega}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. ∎

Definition 4.12 Ein Operator $\gamma \in \mathscr{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\partial\Omega))$ heißt *Spuroperator* , falls

$$\gamma(u)(x) = u|_{\partial\Omega}(x), \quad x \in \partial\Omega \quad \forall\, u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Da nach Folgerung 4.11 der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ ist, ist der Spuroperator eindeutig bestimmt.

Im Folgenden bedeutet "$u = \varphi$ auf $\partial\Omega$" die Aussage $\gamma(u) = \varphi$.

Satz 4.13 (**Existenz der Spur**) *Es existiert ein Spuroperator gemäß Definition 4.12*

Beweis für $\Omega = B_1, m = 1, p = 1$. Sei $u \in C^\infty(\overline{B_1})$. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} |\gamma(u)|dS &= \int_{\partial B_1} |u||x|^2 dS = \int_{\partial B_1} |u|x \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \int_{B_1} \operatorname{div}(|u|x)dx = \int_{B_1} \sum_{i=1}^n x_i \operatorname{sign}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + n|u|dx \\ &\le n\|u\|_{W^{1,1}(B_1)}. \end{aligned}$$

Da nach Folgerung 4.11 der Raum $C^\infty(\overline{B_1})$ in $W^{1,1}(B_1)$ dicht ist, lässt sich γ eindeutig zu einem Spuroperator auf $W^{1,1}(B_1)$ ausdehnen. ∎

Definition 4.14 Mit $W_0^{m,p}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $u \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $\gamma(D^\alpha u) = 0$ für alle $|\alpha| \le m - 1$.

Satz 4.15 (**Dichtheit**) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand. Dann ist der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Beweis Siehe Adams. *Soboleveräume*

Bemerkung 4.16 Gemäß Satz 4.15 können wir $W_0^{m,p}(\Omega)$ als Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm in $W^{m,p}(\Omega)$ definieren.

Satz 4.17 (**Äquivalente Normierung**) *Der Ausdruck*

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}, \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

definiert eine äquivalente Norm auf $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Beweis für $m = 1$: Sei $x_0 \in \Omega$. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir setzen u durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort und bezeichen diese Fortsetzung ebenfalls mit u. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Unter Verwendung partieller Integration findet man

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega |u|^p dx \; &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^p \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - x_{0,i})dx \; = \; -p \int\limits_\Omega \operatorname{sign}(u)|u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i - x_{0,i})dx \\ &\le \; p \operatorname{diam}(\Omega) \int\limits_\Omega |u|^{p-1} |\nabla u| dx \\ &\overset{\text{(Hölder)}}{\le} \; p \operatorname{diam}(\Omega) \|u\|^{p-1}_{L^p} \|\nabla u\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le p \operatorname{diam}(\Omega) |u|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da nach Satz 4.15 der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ dicht ist, ergibt sich die Behauptung.
Für den allgemeinen Fall folgt die Aussage mithilfe vollständiger Induktion. ■

Satz 4.18 *Für $1 \le p < \infty$ ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis 1° Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $R > 0$ beliebig fixiert. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_{2R})$ mit $\eta \equiv 1$ auf B_R und

$$|\eta| \le 1, \qquad |\nabla \eta| \le cR^{-1} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $u\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Unter Verwendung der Produktregel findet man

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u\eta) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta + u\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\Big\| \frac{\partial}{\partial x_i}(u\eta) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p} &\le \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p} + \Big\| u\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\Big\|_{L^p} \\
&\le \Bigg(\int\limits_{|x|>R} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p dx \Bigg)^{\frac{1}{p}} + \frac{c}{R^{1/p}}\|u\|_{L^p} \\
&\to 0 \quad \text{für} \quad R \to +\infty.
\end{aligned}
$$

2° Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|u - u_\delta\|_{W^{1,p}} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $u_\delta = u * \rho_\delta \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert nach 1° ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|u_\delta - \varphi\|_{W^{1,p}} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kombination der beiden obigen Ungleichungen beweist die Behauptung. ■

4.2 Die Sobolevschen Einbettungssätze

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für $f \in C^1([a,b])$, dass

$$f(t) = f(a) + \int\limits_a^t f'(s)ds \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Falls $f' \in L^1(a,b)$, so wäre aufgrund der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals die rechte Seite der obigen Identität eine stetige Funktion. Dies deutet darauf hin, dass $W^{1,1}((a,b))$ in $C^0([a,b])$ eingebettet ist. Die Frage stellt sich also allgemein, in welchen Raum ist $W^{1,p}(\Omega)$ eingebettet. Wie wir unten sehen werden hängt die Antwort von der Dimension n und dem Integrierbarkeitsexponenten p ab. Prinzipiell haben wir drei Typen von Einbettungen

$$
\begin{aligned}
1 \le p < n &\quad \Longrightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \\
p = n &\quad \Longrightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow Orlicz - Raum \\
n < p \le \infty &\quad \Longrightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

Auf den kritischen Fall $p = n$ gehen wir nicht weiter ein. Einige Ausführungen findet man in D. Gilbarg-N.S. Trudinger: *Elliptic partitial differential equations of second order* (Springer 1984) (Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften).

Der Fall $1 \le p < n$

Wir beginnen mit einer vorbereitenden multiplikativen Ungleichung

Lemma 4.19 (**Galgiardo**) *Es existert eine Konstante $\gamma_n > 0$, so dass*

$$\|\varphi\|^n_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_n \prod_{i=1}^n \Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, \varphi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis Wir illustrieren den Beweis für $n = 2$. Aufgrund von Satz 4.18 genügt es die Ungleichung für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann erhalten wir unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\varphi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(y_1, x_2)dy_1 = \int_{-\infty}^{x_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, y_2)dy_2.$$

Multiplikation beider Identitäten liefert unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}(\varphi(x_1, x_2))^2 &= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(y_1, x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, y_2)dy_1dy_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(y_1, x_2)\Big|\,\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, y_2)\Big|dy_1dy_2.\end{aligned}$$

Integriert man beide Seiten über $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, so folgt unter Verwendung des Satzes von Fubini, dass

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2_{L^2} &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(y_1, x_2)\Big|\,\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, y_2)\Big|dy_1dx_2dy_2dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(y_1, x_2)\Big|dy_1dx_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(y_1, x_2)\Big|dx_1dy_2 \\ &= \Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

∎

Unter Verwendung von Lemma 4.19 zeigt man

Satz 4.20 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Sei $1 \leq p < n$. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega).$$

Insbesondere existiert eine Konstante $\gamma_{n,p,\Omega}$, so dass

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq \gamma_{n,p,\Omega}\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Beweis 1° Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $\varphi = |u|^{\frac{p(n-1)}{p-n}} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Unter Verwendung von Lemma 4.19 und der Hölderschen Ungleichung erhält man

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \le \gamma_n \|\nabla\varphi\|_1 \le c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} dx$$
$$\le c \|\nabla u\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Dies impliziert

$$\|u\|_{L^{\frac{nq}{n-q}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} \le c \|\nabla u\|_{L^1}.$$

Aus Satz 4.18 folgt

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \le c \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

2° Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Sei $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ der Fortsetzungsoperator, gemäß Satz 4.10. Dann folgt aus der Stetigkeit von E zusammen mit 1°

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \le \|Eu\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \le c \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

■

Der Fall $n < p \le \infty$

Satz 4.21 *Sei $n < p \le \infty$. Dann $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.*

Beweis 1° Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(y) u(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Φ_0 die Fundamentallösung von $-\Delta$ ist. Mit Hilfe von Satz 3.18 und partieller Integration bekommt man

$$u(x) = -\Delta w(x) = \frac{1}{ne_n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{|y|^n} \frac{\partial}{\partial y_i} u(x-y) dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $\eta \in C_0^\infty(B_2)$ mit $0 \le \eta \le 1, \eta \equiv 1$ auf B_1 und $|\nabla\eta| \le c$. Unter Verwendung partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{ne_n} \int\limits_{B_2} \sum_{i=1}^{n} \eta(y) \frac{y_i}{|y|^n} \frac{\partial}{\partial y_i} u(x-y) dy \\ &\qquad + \frac{1}{ne_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \sum_{i=1}^{n} (1-\eta(y)) \frac{y_i}{|y|^n} \frac{\partial}{\partial y_i} u(x-y) dy \\ &= \frac{1}{ne_n} \int\limits_{B_2} \sum_{i=1}^{n} \eta(y) \frac{y_i}{|y|^n} \frac{\partial}{\partial y_i} u(x-y) dy \\ &\quad + \frac{1}{ne_n} \int\limits_{B_2 \setminus B_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial y_i}(y) \frac{y_i}{|y|^n} u(x-y) dy \;=\; I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Sei $n < p < \infty$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung bekommt man wegen $p'(n-1) < n$

$$|I_1| + |I_2| \;\le\; c\Big(\int\limits_{B_2} |y|^{-p'(n-1)} dy \Big)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla u\|_{L^p} \;+\; c\|u\|_{L^p} \;\le\; c\|u\|_{W^{1,p}}.$$

Folglich

$$\max |u| \;\le\; c\|u\|_{W^{1,p}}.$$

2° Unter Verwendung von Satz 4.19 schließt man $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0_B(\mathbb{R}^n)$.

3° Nun sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ die Fortsetzung von $W^{1,p}(\Omega)$ gemäß Satz 4.10. Dann folgt

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \;\le\; \max_{\mathbb{R}^n} |Eu| \;\le\; c\|Eu\|_{W^{1,p}} \;\le\; c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Da $C^1(\overline{\Omega})$ in $W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist, ergibt sich die Behauptung. ■

4.3 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen

Definition 4.22 Seien $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)\,(i,j = 1,\dots,n)$. Die partielle lineare partielle Differentialgleichung

$$(1) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \text{in} \quad \Omega$$

heißt *elliptisch*, falls eine Konstante $c_0 > 0$ existiert, so dass

$$(4.2) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{f.f.a. } x \in \Omega.$$

Die Gleichung (1) schließen wir durch eine der folgenden Ranbedingungen ab:

I **Dirichlet-Randbedingung**:

$$(2)_{\mathrm{D}} \qquad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega;$$

II **Neumann-Randbedingung**:

$$(2)_{\mathrm{N}} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i \ = \ 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bemerkung 4.23 Falls $a_{ij} = \delta_{ij}, b_i = c = 0, \operatorname{div} \boldsymbol{f} = f$, so ist das Problem (1), $(2)_{\mathrm{D}}$ die bereits untersuchte Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

□

Wir kommen nun zu dem Begriff der schwachen Lösung.

Definition 4.24 Sei $\boldsymbol{f} \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. 1. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (1), falls

$$(4.3) \qquad \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + c u \varphi dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

2. Die schwache Lösung u erfüllt die *Randbedingung* $(2)_{\mathrm{D}}$, falls die Spur von u auf $\partial\Omega$ gleich 0 ist, was äquivalent ist zu

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

3. Sei $\boldsymbol{f} \in W^{1,1}(\Omega)$. Die schwache Lösung u erfüllt die *Randbedingung* $(2)_{\mathrm{N}}$, falls anstelle von (4.3) gilt:

$$(4.4) \qquad \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + c u \varphi dx = - \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{f} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

4. Seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b_i, c, f_i \in C^1(\overline{\Omega})\, (i, j = 1, \dots, n)$. Die Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt *klassische Lösung* von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$ (bzw. $(2)_{\mathrm{N}}$), falls $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und

$$Lu \ = \ -\operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Big(\text{bzw.} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i \Big|_{\partial\Omega} = 0\Big)$$

punktweise erfüllt ist.

Satz 4.25 *Seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b_i, c, f_i \in C^1(\overline{\Omega})\, (i, j = 1, \dots, n)$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$u \quad \textit{schwache Lösung} \quad \Longleftrightarrow \quad u \quad \textit{klassische Lösung.}$$

Beweis $\Rightarrow$: Sei u schwache Lösung von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$. Nach Voraussetzung ist $\gamma(u) = 0$.

Wegen $u \in C^0(\overline{\Omega})$ folgt aus der Definition des Spuroperators, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Aus der Identität folgert man mithilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} -\int\limits_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} \varphi dx &= \int\limits_\Omega -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j})\varphi + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \, + \, cu\varphi dx \\ &= \int\limits_\Omega Lu\varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung bekommt man $Lu = -\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ in Ω. Somit ist u eine klassische Lösung von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$.

$\Rightarrow$: Sei u klassische Lösung von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Mithilfe partieller Integration berechnet man

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega f_i D_i \varphi dx &= \int\limits_\Omega -D_i f_i \varphi dx = \int\limits_\Omega Lu\varphi dx = \\ &= \int\limits_\Omega a_{ij} D_i u_i D_j \varphi \, + \, b_i(D_i u)\varphi \, + \, cu\varphi dx. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir wegen $u = 0$ auf $\partial\Omega$, dass $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Folglich ist u eine schwache Lösung von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$.

Den Fall der Neumann-Aufgabe $(2)_N$ beweist man analog und wird dem Leser überlassen

■

Satz 4.26 (**Existenz schwacher Lösungen**) *Seien $a_{ij} = a_{ji}$ symmetrische Koeffizienten, beschränkt und positiv definit. Seien $b_i = c = 0$. Für jedes $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ hat das Dirichlet-Proplem (1), $(2)_{\mathrm{D}}$ genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Beweis 1° *Existenz* Wir definieren

$$(u,v) := \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx, \quad u,v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Aufgrund von Satz 4.16 definiert $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, der mit der Norm $|\cdot| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$ zu einem Hilbertraum wird. Man beachte hierbei, dass aus der positiven Definitheit von (a_{ij}) für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ folgt

$$|v|^2 = (v,v) = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \geq c_0 \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx = c_0|v|^2_{W_0^{1,2}}.$$

Dies zeigt, dass $|\cdot|$ eine äquivalente Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

Definiert man außerdem

$$F(v) := \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

so folgt unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|F(v)| \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq c \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} |v| \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dies zeigt, dass $F \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$. Gemäß des **Rieszschen Darstellungssatzes** (Siehe Kap. 5 unten) gibt es genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, derart dass

$$(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Aus der Definition des Skalarprodukts folgt, dass u eine schwache Lösung von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$ ist.

2° *Eindeutigkeit* Seien $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, schwache Lösungen von (1), $(2)_{\mathrm{D}}$. Dann erfüllt $w := u - v$ die folgende Integralidentität

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i w D_j \varphi dx \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Da nach Satz 4.15 der Raum $C_0^{\infty}(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, haben wir

$$|w|^2 \;=\; (w, w) \;=\; \int_{\Omega} a_{ij} D_i w D_j w dx \;=\; 0.$$

Dies impliziert $w = 0$. ■

4.4 Regularität schwacher Lösungen

Wir haben gesehen, dass die Existenz der schwachen Lösung einfacher ist als die der klassischen Lösung, allerdings zu dem Preis, dass wir auf Regularitätseigenschaften verzichten mussten. Es besteht also nun die Aufgabe unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten die Regularität schwacher Lösungen nachzuweisen. Hierfür werden wir die sogenannte Differenzenquotientenmethode verwenden.

Wir beginnen mit der Definition des Differenzenquotienten und geben einige Eigenschaften an.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar. Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit f. Für $k = 1, \ldots, n$ definieren wir den k-ten Differenzenquotienten

$$\Delta_h^k f(x) := \frac{1}{h}(f(x + he_k) - f(x)), \quad x \in \Omega, \quad 0 < |h| < +\infty.$$

Hierbei bezeichne $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ den k-ten Einheitsvektor.

Einige Eigenschaften des Differenzenquotienten sind in dem folgenden Lemma zusammengefasst

Lemma 4.27 *(a) Seien $f, g \in L^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta_h^k f) g dx = -\int\limits_{\Omega} f(\Delta_{-h}^k g) dx$$

(b) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:

$$\Delta_h^k (fg) = (\Delta_h^k f) g + f(\cdot + he_k) \Delta_h^k f = (\Delta_h^k f) g(\cdot + he_k) \; + \; f \Delta_h^k g$$

fast überall in Ω.

(c) Für $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$ ist

$$\Delta_h^k f \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), \partial\Omega).$$

(d) Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Für alle $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$:

$$\begin{aligned} &\Delta_h^k f \in W^{1,p}(\Omega'), \\ &D_i \Delta_h^k f = \Delta_h^k D_i f \quad \textit{fast überall in } \; \Omega' \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Beweis (a) Mithilfe der Transformationsformel findet man

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (\Delta_h^k f) g dx \;&=\; \frac{1}{h} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x + he_k) - f(x)) g(x) dx \\ &=\; \frac{1}{h} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(g(x - he_k) - g(x)) dx \\ &=\; -\int\limits_{\Omega} f(\Delta_{-h}^k g) dx. \end{aligned}$$

(b) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Elementar berechnet man

$$\begin{aligned} \Delta_h^k (fg)(x) \;&=\; f(x + he_k) g(x + he_k) - f(x) g(x) \\ &=\; f(x + he_k)(g(x + he_k) - g(x)) + (f(x + he_k) - f(x)) g(x) \end{aligned}$$

für fast alle $x \in \Omega$. Dies zeigt (b).

(c) Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$. Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, dann ist $\operatorname{supp}(f(\cdot + he_k)) \subset\subset \Omega$. Also gilt $f(\cdot + he_k) \in W^{1,p}(\Omega)$. Dies zeigt (c)

(d) Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Dann ist $\Delta_{-h}^k \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und es gilt $D_i \Delta_{-h}^k \varphi = \Delta_{-h}^k D_i \varphi$. Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega'} (\Delta_h^k D_i f) \varphi dx \;&=\; -\int\limits_{\Omega} D_i f \Delta_{-h}^k \varphi dx \;=\; \int\limits_{\Omega} f D_i \Delta_{-h}^k \varphi dx \\ &=\; -\int\limits_{\Omega'} (\Delta_h^k f) D_i \varphi dx. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\Delta_h^k D_i f$ die i-te schwache Ableitung von $\Delta_h^k f$ in Ω' ist. ∎

Lemma 4.28 *Sei $u \in L^p(\Omega)$. Wir nehmen an, es existiert die k-te schwache Ableitung $D_k u \in L^p(\Omega)$. Dann gilt für jede offene Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$*

$$\int_{\Omega'} |\Delta_h^k u|^p dx \;\leq\; \|D_k u\|^p_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Beweis Sei $u \in L^p(\Omega)$. Ferner existiere die k-te schwache schwache Ableitung $D_k u$ in Ω. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Wir setzen

$$\Omega'' \;:=\; \Big\{ x + the_k \,\Big|\, x \in \Omega', t \in [0,1] \Big\}.$$

Dann ist $\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega) > 0$. Wir definieren die Glättung

$$u_\varepsilon(x) \;=\; u * \rho_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega).$$

Für $x \in \Omega''$ ist $\varphi = \rho_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$. Aus der Definition der schwachen Ableitung folgt

$$\begin{aligned} D_k u_\varepsilon(x) \;&=\; \int_\Omega u(y)\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y)dy = -\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial y_k}\rho_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int_\Omega D_k u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy \\ &= (D_k u)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bekommt man

$$u_\varepsilon(x + he_k) - u_\varepsilon(x) \;=\; \int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x + the_k)hdt \quad \forall\, x \in \Omega'.$$

Sei $x \in \Omega'$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) - h$. Mithilfe der Dreiecksungleichung und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_\varepsilon(x + he_k) - u_\varepsilon(x)|^p dx \;&\leq\; h \int_{\Omega'}\int_0^1 |D_k u_\varepsilon(x + the_k)|^p hdtdx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega'} |D_k u_\varepsilon(x + the_k)|^p hdxdt \\ &\leq\; h\|D_k u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega'')} \\ &\leq\; h\|(D_k u)_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega'')}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int\limits_{\Omega'} |\Delta_h^k u_\varepsilon|^p dx \le \|(D_k u)_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega'')} \le \|D_k u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Wegen

$$\Delta_h^k u_\varepsilon \to \Delta_h^k u \quad \text{in} \quad L^p(\Omega') \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

ergibt sich die Behauptung aus der obigen Ungleichung nach Ausführung des Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$. ■

Lemma 4.29 *Sei $u \in L^p(\Omega)\,(1 < p < \infty)$. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir nehmen an, es existiert eine Konstante $C_0 > 0$, so dass*

$$\int\limits_{\Omega'} |\Delta_h^k u|^p dx \;\le\; C_0^p \quad \forall\, 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega),$$

so existiert die k-te schwache Ableitung $D_k u \in L^p(\Omega')$ von u in Ω' und es gilt:

$$\|D_k u\|_{L^p(\Omega')} \;\le\; C_0.$$

Beweis Sei (h_m) eine Folge in $(0, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ mit $h_m \to 0$ für $m \to \infty$. Wir definieren

$$v_m := \Delta_{h_m}^k u, \qquad \text{f.ü. in } \Omega \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Nach Voraussetzung ist (v_m) in $L^p(\Omega')$ durch C_0 beschränkt. Da $L^p(\Omega')$ reflexiv ist, existiert eine Teilfolge (v_{m_j}) und eine Funktion $v \in L^p(\Omega')$, so dass

$$\int\limits_{\Omega'} v_{m_j} \varphi dx \to \int\limits_{\Omega'} v \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega').$$

Sei $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung und der Voraussetzung erhält man

$$\left|\int\limits_{\Omega'} v_{m_j} \varphi dx\right| \le \|v_{m_j}\|_{L^p(\Omega')} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega')} \le C_0 \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega')}$$

Dies impliziert

$$\left|\int\limits_{\Omega'} v \varphi dx\right| \;\le\; C_0 \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega')} \qquad \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega').$$

Also gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{L^p(\Omega')} \;\le\; C_0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $v =: D_k u$ die k-te schwache Ableitung von u ist. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Unter Verwendung von Lemma 4.27 (a) erhält man

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} v\varphi dx &= \lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\Delta^k_{h_{m_j}} u)\varphi dx\\ &= \lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u\Delta^k_{-h_{m_j}}\varphi dx = -\int\limits_{\Omega'} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass v die k-te schwache Ableitung von u in Ω' ist. ∎

Unter Verwendung von Lemma 4.28 und Lemma 4.29 beweist man das folgende Regularitätsresultat

Satz 4.30 *Sei* $L = -\sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) + \sum\limits_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ *ein elliptischer Differentialoperator mit* $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\Omega)\,(i,j=1,\dots,n)$. *Sei* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Ist* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \quad in \quad \Omega,$$

so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis 1° Wir betrachten den Fall $b_i = 0, c = 0$. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu = f \in W^{1,2}(\Omega)$, so gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)D_j u D_i\varphi dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Unter Verwendung eines Dichtheitsarguments bekommt man

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)D_j u D_i\varphi dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx \quad \forall\,\varphi \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega.$$

Sei $B_{4R}(x_0) \subset\subset \Omega$ eine beliebige Kugel. Sei $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ mit $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ auf B_R, Wir definieren

$$\varphi(x) = -\Delta^k_{-h}(\eta^2\Delta^k_h u)(x), \quad x \in \Omega, \quad 0 < |h| < R.$$

Dann ist $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$, also zulässig für die obige Integralidentität. Nach Einsetzen und Anwendung der Produktregel sowie Lemma 4.27 findet man

$$\begin{aligned}J := \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \eta^2\Delta^k_h(a_{ij}(x)D_j u)\Delta^k_h D_i u dx &=\\ &= -2\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega(\Delta^k_h a_{ij}(x)D_j u)\eta D_i\eta\Delta^k_h u dx - \int\limits_\Omega \Delta^k_{-h}(\eta^2\Delta^k_h u)f dx\\ &= I + II.\end{aligned}$$

(i) *Abschätzung der linken Seite nach unten*: Mithilfe von Lemma 4.27(b), (d), der Bedingung (4.2), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung bekommt man

$$
\begin{aligned}
J \;=\; & \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \eta^2 a_{ij}(x)(D_j \Delta_h^k u) D_i \Delta_h^k u dx \\
& + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \eta^2 (\Delta_h^k a_{ij}(x)) D_j u(\cdot + h e_k) \Delta_h^k D_i u dx \\
\geq\; & c_0 \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k \nabla u|^2 dx \,+\, \int\limits_{\Omega} \eta^2 (\Delta_h^k a_{ij}(x)) D_j u(\cdot + h e_k) \Delta_h^k D_i u dx \\
\geq\; & c_0 \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \,-\, c \|Du\|_{L^2} \Big(\int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
\geq\; & \frac{c_0}{2} \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \,-\, c \|Du\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

(ii) *Abschätzung der rechten Seite nach oben.* Mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung findet man

$$
\begin{aligned}
I \;\leq\; & c \int\limits_{\Omega} \eta |\Delta_h^k D u| |D\eta| |\Delta_h^k u| dx \,+\, c|h| \int\limits_{\Omega} |Du| |D\eta| |\Delta_h^k u| dx \\
\leq\; & \frac{c_0}{8} \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \\
& + c \int\limits_{B_{2R}} |\Delta_h^k u|^2 dx \,+\, c \|Du\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt zusammen mit Lemma 4.28

$$
I \;\leq\; \frac{c_0}{8} \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \,+\, c \|Du\|_{L^2} .
$$

Analog zeigt man

$$
II \;\leq\; \frac{c_0}{8} \int\limits_{\Omega} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \,+\, c(\|Du\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) .
$$

Kombination der beiden obigen Ungleichungen ergibt

$$
\int\limits_{B_R} \eta^2 |\Delta_h^k D u|^2 dx \;\leq\; c(\|Du\|_{L^2}^2 \,+\, \|f\|_{L^2}^2) .
$$

Gemäß Lemma 4.29 existiert die k-te schwache Ableitung von Du in $L^2(B_R)$ und es gilt

$$
\|D_k D u\|_{L^2(B_R)} \;\leq\; c(\|Du\|_{L^2}^2 \,+\, \|f\|_{L^2}^2) .
$$

Folglich haben wir $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

2° Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Aus $Lu = f$ folgt

$$-D_j(a_{ij}D_i u) \;=\; -b_i D_i u - cu - D_i f_i \;=\; \widetilde{f}.$$

Nach Voraussetzung haben wir $\widetilde{f} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Gemäß 1° folgt $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$. Insbesondere ist $D_k\widetilde{f} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)\,(k = 1, \ldots, n)$.
Sei $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$. Wir erhalten unter Verwendung partieller Integration

$$\begin{aligned}-\int\limits_\Omega a_{ij}D_i u D_j D_k \varphi dx \;&=\; \int\limits_\Omega a_{ij}D_i D_k u D_j \varphi dx \;+\; \int\limits_\Omega (D_k a_{ij}) D_i u D_j \varphi dx \\ &=\; \int\limits_\Omega D_k \widetilde{f} \varphi dx.\end{aligned}$$

Somit ist $v = D_k u$ schwache Lösung von

$$Lv \;=\; D_j((D_k a_{ij})D_i u) \;+\; D_k\widetilde{f} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Nochmaliges Anwenden von 1° ergibt $v \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, also $u \in W^{3,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Wir können das obige Argument beliebig oft wiederholen und erhalten

$$u \in W^{m,2}_{\text{loc}}(\Omega) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Sobolevschen Einbettungssätzen folgt $u \in C^\infty(\Omega)$. ∎

Satz 4.31 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet. Seien $a_{ij}, b_i, c, f_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, \ldots, N)$. Sei $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ schwache Lösung von (1), (2)$_D$, so ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Beweisschritte *1. Lokale Regularität*: Folgt aus Satz 4.30.
2. Randregularität 1° Der Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (Halbraum). Sei $u \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$ mit $\text{supp}(u) \subset\subset \overline{\mathbb{R}^n}_+$ schwache Lösung von

$$-D_j(a_{ij}D_i u) \;=\; f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+.$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.30 zeigt man $D_k Du \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$\|D_k Du\|_{L^2} \;\le\; c(\|Du\|_{L^2} \;+\; \|f\|_{L^2}) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n-1.$$

Folglich ist

$$-a_{ij}D_i D_j u \;=\; (D_j a_{ij})(D_i u) + f = \widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

Falls $a_{nn} \neq 0$, so folgt aus der obigen Gleichung

$$D_n D_n u \;=\; -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{nn}^{-1} a_{ij} D_i D_j u - a_{nn}^{-1}\widetilde{f} \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Also $D_nD_nu \in L^2$. Falls $a_{nn} = 0$, so findet man

$$|D_nDu|^2 \le c_0^{-1} a_{ij} D_i D_n u D_j D_n u \; = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_i u D_j u \in L^1,$$

was ebenfalls zeigt, dass $D_nD_nu \in L^2$. Somit gilt:

$$u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n_+).$$

Analog zeigt man $D_k u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n_+)$ für $k = 1, \dots, n-1$ und anschließend $D_nD_nD_nu \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, was zeigt, dass

$$u \in W^{3,2}(\Omega).$$

Wiederholtes Anwenden des obigen Arguments impliziert $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n_+)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Sobolevschen Einbettungssätze liefern $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n}_+)$.

2° Sei Ω glattes Gebiet. Wir überdecken den Rand $\partial\Omega$ mit geeigneten Karten. Betrachten die Differentialgleichung in lokalen Koordinaten und erhalten aus den Fall 1° die globale C^∞-Abschätzung. Rücktransformation ergibt

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

■

Folgerung 4.32 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet. Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Löung des Eigenwertproblems*

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dann ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Folgerung 4.33 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet. Dann existiert eine Greensche Funktion $G = G_{-\Delta,\Omega}$ mit*

$$G(x,\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{x\}) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

5 Parabolische Gleichungen

5.1 Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $0 < T \leq \infty$. Wir setzen $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Wir definieren den Funktionenraum

$$C^{2,1}(Q_T) = \Big\{ u \in C^0(Q_T) \,\Big|\, D^\alpha u \in C^0(Q_T) \forall\, |\alpha| \leq 2, \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(Q_T) \Big\}.$$

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \times [0,T).$$

Wir schließen diese Gleichung durch folgende Randbedingung und Anfangsbedingung ab:

$$(2)_D \qquad u(x,t) = 0, \qquad \forall\, (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T)$$

$$(3) \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega.$$

Definition 5.1 Eine Funktion $u \in C^{2,1}(Q_T)$ heißt *kalorisch*, falls

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Wir bezeichnen die Menge der kalorischen Funktionen mit $K(Q_T)$. Ferner bezeichne $\overline{K}(Q_T)$ den Raum $K(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$.

Bemerkung 5.2 Sei $u \in K(Q_T)$ kalorisch. Dann ist die Funktion

$$\widetilde{u}(y,s) = u(\lambda y, \lambda^2 s), \quad y \in \widetilde{Q}_{\lambda^{-1}T} := \lambda^{-1}\Omega \times (0, \lambda^{-1}T).$$

ebenfalls kalorisch, also $\widetilde{u} \in K(\widetilde{Q}_{\lambda^{-1}T})$. □

5.2 Caccioppoli-Ungleichungen

Ähnlich wie bei harmonischen Funktionen genügen die kalorischen Funktionen einer Mittelwerteigenschaft, die allerdings etwas komplizierter aussieht. Daher werden wir hier auf die Einführung dieser Mittelwerteigenschaft verzichten und führen als Alternative die sogenannten Caccioppoli-Ungleichungen ein, welche man auch als lokale "Energieungleichungen" bezeichnet. Dazu der folgende

Satz 5.3(**Lokale Energiegleichung**) *Sei $u \in K(Q_T)$. Dann gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(Q_T)$*

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \phi(\cdot,s) u^2(\cdot,t)dx + \int_0^t \int_\Omega \phi |\nabla u|^2 dxds = \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi \Big) u^2 dxds$$

für alle $t \in [0,t)$

Beweis Sei $\phi \in C_0^\infty(Q_T)$. Sei $u \in K(Q_T)$. Unter Verwendung der Produktregel berechnet man

$$\frac{1}{2}\Delta u^2 \;=\; |\nabla u|^2 \;+\; \Delta u u \quad\Longrightarrow\quad -\Delta u u \;=\; -\frac{1}{2}\Delta u^2 - |\nabla u|^2.$$

Mithilfe dieser Identität bekommt man

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; (u_t - \Delta u)u\phi \\ &=\; \phi u u_t - \phi \Delta u u \;=\; \frac{1}{2}\phi(u^2)_t - \frac{1}{2}\phi\Delta u^2 + \phi|\nabla u|^2 \\ &=\; \frac{1}{2}(\phi u^2)_t - \frac{1}{2}\phi_t u^2 - \frac{1}{2}\phi\Delta u^2 + \phi|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Sei $t \in [0,T]$. Wir integrieren beide Seiten über $\Omega \times (0,t)$ und verwenden partielle Integration. Dies liefert

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\int_\Omega \phi u^2 \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega -\phi_t u^2 - \phi\Delta u^2 dxds + \int_0^t\int_\Omega \phi|\nabla u|^2 dxds \\ &=\; \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(\cdot,s)u^2(\cdot,s)dx\Big|_0^t \;+\; \int_0^t\int_\Omega \phi|\nabla u|^2 dxds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega (\phi_t \;+\; \Delta\phi)u^2 dxds \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Sei $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $0 < R < +\infty$. Wir definieren den parabolischen Zylinder

$$Q_R(x_0,t_0) := B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0).$$

Wenn keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir kürzer Q_R anstatt $Q_R(x_0,t_0)$.

Satz 5.4(**Caccioppoli-Ungleichungen**) *Sei $u \in K(Q_T)$. Sei $Q_R = Q_R(x_0,t_0) \subset\subset Q_T$. Dann gilt für alle $0 < \rho < R$:*

$$\sup_{t\in(t_0-\rho^2,t_0)} \int_{B_\rho} u^2(\cdot,t)dx \;+\; \int_{Q_\rho} |\nabla u|^2 dxdt \le \frac{c_0}{(R-\rho)^2}\int_{Q_R} |u|^2 dxdt,$$

wobei die Konstante $c_0 > 0$ weder von u noch von R und ρ abhängt.

Beweis Wir setzen im Satz 5.3 $\phi(x,t) = \eta(x)\zeta(t)$, wobei $\eta \in C_0^\infty(B_R)$, $0 \le \eta \le 1, \eta \equiv 1$ auf B_ρ und $|\nabla\eta| \le c/(R-\rho), |D^2\eta| \le c/(R-\rho)^2$ und $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 0$ in $(-\infty, t_0 - R^2)$ und $\zeta \equiv 1$ auf $(t_0 - \rho^2, +\infty)$ sowie $|\zeta'| \le c/(R-\rho)^2$. Aus Satz 5.3 folgt für $t \in (t_0 - \rho^2, t_0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{B_\rho} u^2(\cdot,t)dx \;+\; \int_{t_0-\rho^2}^t \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dxds \;&\le\; \frac{1}{2}\int_{Q_R} |\phi_t + \Delta\phi| u^2 dxds \\ &\le\; \frac{c}{(R-\rho)^2}\int_{Q_R} u^2 dxds. \end{aligned}$$

Bildet man das Supremum über $t \in (t_0 - \rho^2, t_0)$, so ergibt sich die Behauptung. ■

5.3 Glättungsprinzip und Liouville-Satz

Satz 5.5 *Sei $u \in \overline{K}(Q_R) \cap C^\infty(Q_R)$. Dann gilt für jedes $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$\sup_{\overline{Q}_{R/2}} |D_t^l D_x^k u| \leq c_{l,k} R^{-2l-k} \sup_{Q_R} |u|.$$

Hiebei bezeichne $D_x^k u$ den k-Tensor k-ten Ableitung $(D^\alpha u)_{|\alpha|=k}$ von u bezüglich der Ortsvariable $x \in \Omega$ und $D_t^l u$ die l-ten partiellen Ableitungen von u bezüglich der Zeitvariablen $t \in (0, T)$.

Beweis 1° Der Fall $Q_R = Q_1(0,0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$r_k := 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-k}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $D_x^k u \in K(Q_1)$. Unter Verwendung von Satz 5.4 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in (-r_1^2, 0)} \int_{B_{r_1}} |D_x^k u(\cdot, t)|^2 dx + \int_{Q_{r_1}} |D_x^{k+1} u|^2 dxdt \leq \\
&\leq c4^1 \int_{Q_{r_2}} |D_x^k u|^2 dxdt \\
&\leq c4^1 4^2 \int_{Q_{r_3}} |D_x^{k-1} u|^2 dxdt \leq \ldots \leq c4^{1+2 \cdots + k + k+1} \int_{Q_{r_k}} |u|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Folglich gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_k > 0$, so dass

$$\max_{t \in [-1/4, 0]} \|u(t)\|_{W^{k,2}(B_{1/2})} \leq c(k) \max_{\overline{Q}_1} |u|.$$

Unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes findet man für $m = [n/2] + 1$,

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{Q}_{1/2}} |D_x^k u| \leq \max_{\overline{Q}_{1/2}} \|D_x^k u\|_{W^{m,2}(B_{1/2})} &\leq \max_{t \in [-1/4, 0]} \|u(t)\|_{W^{m+k,2}(B_{1/2})} \\
&\leq c_{m+k} \max_{\overline{Q}_1} |u|.
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ folgt $D_t^l D_x^k u = \Delta_t^l D_x^k u$. Aus der obigen Ungleichung schließt man

$$\sup_{\overline{Q}_{1/2}} |D_t^l D_x^k u| \leq c_{2l+k+m} \max_{\overline{Q}_1} |u|.$$

2° Nun sei $u \in \overline{K}(Q_R)$. Wir definieren

$$v(y, s) = u(x_0 + Ry, t_0 + R^2 s), \quad (y, s) \in Q_1.$$

Dann ist $v \in \overline{K}(Q_1)$ (Siehe Bem. 5.2). Nach 1° und Anwendung der Kettenregel folgt

$$R^{2l+k} \sup_{\overline{Q}_{R/2}(x_0,t_0)} |D_t^l D_x^k u| = \sup_{\overline{Q}_{1/2}} |D_s^l D_y^k v| \le c \sup_{Q_1} |v| = c \sup_{Q_R(x_0,t_0)} |u|.$$

■

Satz 5.6 *Sei $u \in C^0(Q_T)$ mit*

$$\int_{Q_T} u\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi\Big) dxdt \; = \; 0 \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Dann ist $u \in K(Q_T) \cap C^\infty(Q_T)$. Insbesondere gilt $K(Q_T) \subset C^\infty(Q_T)$.

Beweis Sei $Q_{2R} \subset\subset Q_T$. Sei $\rho_\varepsilon(x,t)\,(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ ein Glättungskern mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset B_\varepsilon(0) \times (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$ und $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho_\varepsilon dxdt = 1$. Wir setzen

$$u_\varepsilon(x,t) \; = \; \int_{Q_T} u(y,s)\rho_\varepsilon(x-y,t-s)dyds, \quad (x,t) \in Q_R.$$

Wählen $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon(x-\cdot,t-\cdot)) \subset\subset Q_T$ für alle $(x,t) \in Q_{2R}$. Dann folgt unter Verwendung der Transformationsformel und der Voraussetzung mit $\phi = \rho_\varepsilon(x-\cdot,t-\cdot)$

$$\begin{aligned} 0 \; &= \; \int_{Q_T} u\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big) dyds \\ &= \; \int_{Q_T} u(-\frac{\partial}{\partial s}\rho_\varepsilon(x-y,t-s) + \Delta_x \rho_\varepsilon(x-y,t-s))dyds \\ &= \; -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,t) + \Delta u_\varepsilon(x,t). \end{aligned}$$

Folglich ist $u_\varepsilon \in \overline{K}(Q_R) \cap C^\infty(Q_R)$. Unter Verwendung von Satz 5.5 ergibt sich

$$\sup_{\overline{Q}_R} |D_t^l D_x^k u_\varepsilon| \; \le \; \sup_{\overline{Q}_{2R}} |u_\varepsilon|.$$

Folglich ist $(D_t^l D_x^k u_\varepsilon)$ eine Cauchy-Folge in $C^0(\overline{Q}_R)$. Dies impliziert $D_t^l D_x^k u \in C^0(Q_T)$. Außerdem folgt nach partieller Integration

$$\int_{Q_T} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\Big)\phi dxdt = 0 \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(Q_T)$$

also $u \in K(Q_T)$ mit $u \in C^\infty(Q_T)$. ■

Satz 5.7 (**Liouville**) *Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0))$ und beschränkt mit*

$$\int_{Q_T} u\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big) dxdt = 0 \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Dann ist $u = \text{const}$.

Beweis Wir setzen $\tilde{Q} := \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$. Wegen Satz 5.6 gilt $u \in K(\tilde{Q}) \cap C^\infty(\tilde{Q})$. Sei $Q_R \subset\subset \tilde{Q}$. Gemäß Satz 5.5 haben wir

$$\sup_{\overline{Q}_R} |D_x u| \le cR^{-1} \max_{\overline{Q}_{2R}} |u| \le cR^{-1}.$$

Da $R > 0$ beliebig groß sein darf, folgt $D_x u = 0$. Insbesondere haben wir $\Delta u = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}$. Folglich ist $u = \text{const}$. ■

5.4 Parabolisches Maximumprinzip

Wir definieren den parabolischen Rand des Zylinders Q_T gemäß

$$\partial_* Q_T = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\}).$$

Satz 5.8 (**Maximumprinzip**) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet. Sei* $u \in \overline{K}(Q_T)$. *Dann gilt:*

$$\max_{\overline{Q}_T} u \;=\; \max_{\partial_* Q} u.$$

Beweis Sei $u \in \overline{K}(Q_T)$. Wir setzen $w := u + \varepsilon e^{-t} (\varepsilon > 0)$. Dann

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \;=\; -\varepsilon e^{-t}.$$

Wir nehmen an, w hat ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$. Wegen $-\Delta w(x_0, t_0) \ge 0$ und $\frac{\partial w}{\partial t}(x_0, t_0) \ge 0$ gilt dann

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta w(x_0, t_0) \ge 0.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = -\varepsilon e^{-t} < 0$. Dies zeigt, dass

$$\max_{\overline{Q}_T} (u + \varepsilon e^{-t}) = \max_{\partial_* Q} (u + \varepsilon e^{-t}).$$

Nach Ausführung des Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$ ergibt sich die Behauptung. ■

Folgerung 5.9 *Sei* $u \in \overline{K}(Q_T)$. *Dann gilt:*

$$\min_{\overline{Q}_T} u \;=\; \min_{\partial_* Q} u \qquad \max_{\overline{Q}_T} |u| \;=\; \max_{\partial_* Q} |u|.$$

Satz 5.10 (Hebbare Singularität) *Sei* $u \in K(Q_R(x_0,t_0)) \cap C^0(\overline{Q}_R(x_0,t_0) \setminus \{x_0,t_0\})$. *Dann ist* $u \in \overline{K}(Q_R)$.

Beweis Nach Voraussetzung ist $\max_{\partial_* Q_R} |u| < \infty$. Folglich ist gemäß Folg. 5.9 $\sup_{Q_R} |u| < \infty$. Mithilfe von Satz 5.5 zeigt man

$$\sup_{Q_{R/2}} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big| + |\nabla u| \Big) < \infty.$$

Also ist $u \in C^0(\overline{Q}_R)$. ■

5.5 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Ähnlich wie für den Operator $-\Delta$ suchen wir eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung $\Gamma_0(x,t)$ ($(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$), welche in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \setminus \{(0,0)\}$ lokal beschränkt ist und für die gilt:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big)\Gamma_0 \;=\; \delta_{(0,0)},$$

was bedeutet, dass

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,t)\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big) dx dt \;=\; \phi(0,0) \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)).$$

Dies führt zu der folgenden Definition

Definition 5.11 Eine Funktion $\Gamma_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ mit Γ_0 stetig in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \setminus \{0,0\}$ und $\Gamma_0(\cdot,t)$ beschränkt für alle $t > 0$, heißt *Fundamentallösung* der Wärmeleitung, falls

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,t)\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big) dx dt \;=\; \phi(0,0) \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)).$$

Bemerkung 5.12 1. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Wir definieren

$$u(x,t) \;=\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s)\varphi(x-y,t-s) dy ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Sei $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Für $\phi(y,s) = \varphi(x-y,t-s)$ berechnet man unter Verwendung partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) \;&=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)\varphi(x-y,0)dy \\
&\qquad + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s)\partial_t\varphi(x-y,t-s) - \Delta_x\varphi(x-y,t-s)dyds \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)\phi(y,t)dy \\
&\qquad - \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s)(\phi_t(y,s) + \Delta\phi(y,s))ds \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)\phi(y,t)dy \\
&\qquad + \int\limits_t^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s)(\phi_t(y,s) + \Delta\phi(y,s))dyds \;+\; \phi(0,0) \\
&= \phi(0,0) \;=\; \varphi(x,t).
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir benutzt, dass Γ_0 in $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ kalorisch ist.

Wir sehen also, dass die Funktion u das folgende Anfangswertproblem löst:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \;=\; \varphi \quad \text{in} \quad Q_\infty, \quad u(\cdot,0) \;=\; 0,
$$

wobei $Q_\infty := \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

2. Sei $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$
u(x,t) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x-y)u_0(y)dy, \quad (x,t) \in Q_\infty.
$$

Wegen $\Gamma_0 \in K(Q_\infty)$ folgt $u \in K(Q_\infty)$. Sei $\eta \in C_0^\infty([0,\infty))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $[0,1]$. Wir setzen $\phi(y,t) := u_0(x-y)\eta(t)$. Unter Verwendung partieller Integration bekommt man für $t \in (0,1)$:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \;&=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)\phi(y,t)dy = -\int\limits_t^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s)(\phi_t + \Delta\phi)dyds \\
&\to \phi(0,0) = u_0(x) \quad \text{für} \quad t \to 0.
\end{aligned}
$$

Folglich löst u das Problem

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad Q_\infty, \quad u(\cdot,0) = u_0.
$$

3. Aus 2. folgt für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\psi = 0$ in einer Umgebung von 0

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,0)\psi(y)dy = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)\psi(y)dy = 0.$$

Dies impliziert $\Gamma_0(y,0) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. □

Proposition 5.13 *Sei Γ_0 Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann existiert eine Funktion $U \in C^\infty(\mathbb{R})$, so dass*

(1) $\quad \Gamma_0(x,t) = t^{-n/2}U\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big) \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

(2) $\quad \lim_{r\to\infty} r^n U(r) = 0$.

Beweis 1° Wir definieren für $\lambda > 0$

$$\Gamma_{\lambda,0}(y,s) := \lambda^n \Gamma_0(\lambda y, \lambda^2 s), \quad (y,s) \in \overline{Q}_\infty \setminus \{(0,0)\}.$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\overline{Q}_\infty)$. Wir setzen

$$\widetilde{\phi}(x,t) := \phi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_\infty.$$

Dann ist $\widetilde{\phi} \in C_0^\infty(\overline{Q}_\infty)$. Unter Verwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral berechnet man

$$\begin{aligned}
-\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} & \Gamma_{\lambda,0}(y,s)\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big)dyds = \\
&= -\lambda^n \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(\lambda y, \lambda^2 s)\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big)dyds \\
&= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,t)\Big(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t} + \Delta\widetilde{\phi}\Big)dxdt \\
&= \widetilde{\phi}(0,0) = \phi(0,0).
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$u(x,t) := \begin{cases} \Gamma_0(x,t) - \Gamma_{\lambda,0}(x,t) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \le 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int\limits_{Q_T} u\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big)dxdt = 0 \quad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0,0\}).$$

Gemäß Satz 5.10 hat u im Punkt $(0,0)$ eine hebbare Singularität. Wir erhalten also $u \in C^0_B(\mathbb{R}^{n+1})$. Nach Satz 5.7 ist $u = \text{const} = 0$. Folglich gilt

$$\Gamma_0(x,t) = \lambda^n \Gamma_0(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall (x,t) \in Q_\infty.$$

Eine Funktion mit solch einer Eigenschaft heißt *selbstähnlich*. Für $t > 0$ und $\lambda = t^{-1/2}$ folgt

$$\Gamma_0(x,t) = t^{-n/2}\Gamma_0(x/\sqrt{t}, 1).$$

2° Analog zeigt man, dass $\Gamma_0(\cdot, 1)$ rotationssymmetrisch sein muss. Es existiert also ein $U \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\Gamma_0(x,t) = t^{-n/2} U\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big), \quad (x,t) \in Q_\infty.$$

3° Sei $\widetilde{\Gamma}_0$ die Fortsetzung von Γ_0 auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch 0. Dann folgt aus der Definition der Fundamentallösung, dass

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \widetilde{\Gamma}_0(x,t)\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\Big) dxdt = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \phi(0,0) = 0.$$

Aus dem Glättungsprinzip ergibt sich $\widetilde{\Gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\})$. Folglich ist

$$\Gamma_0(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Aus der obigen Darstellung durch U folgt

$$\Gamma_0(x,t) = t^{-n/2} U\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0.$$

Dies impliziert für $|x| = 1$, $r = t^{-1/2}$

$$r^n U(r) \to 0 \quad \text{für} \quad r \to +\infty.$$

■

Lemma 5.14 *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = (4\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Beweis Unter Verwendung des Satzes von Fubini erhält man

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \prod_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2} dx_i = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-r^2} dr\Big)^n.$$

Für $n = 2$ folgt

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} dr \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx_1 dx_2 \ = \ 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr$$
$$= -\pi e^{-r^2}|_0^\infty = \pi.$$

Dies zeigt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4} dx = 2^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (4\pi)^{n/2}.$$

■

Satz 5.15 (**Fundamentallösung**) *Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch*

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{für} \quad (x,t) \in Q_\infty \\ 0 & \text{für} \quad (x,0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

und ist eindeutig bestimmt.

Beweis Aus Satz 5.9 folgt sofort $\Gamma_0 \in K(Q_\infty)$. Aus der Darstellung in Prop. 5.13 und mithilfe der Kettenregel berechnet man

$$0 \ = \ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} - \Delta \Gamma_0 =$$
$$= -\frac{n}{2} t^{-n/2-1} U(r) - \frac{r}{2} t^{-n/2-1} U'(r) \ - \ t^{-n/2-1} \Big(U''(r) + \frac{n-1}{r} U'(r) \Big),$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{n}{2} U(r) + \frac{r}{2} U'(r) + \frac{n-1}{r} U'(r) + U''(r) =$$
$$= n \Big(\frac{1}{2} U + \frac{1}{r} U' \Big) + r \Big(\frac{1}{2} U' - \frac{1}{r^2} U' + \frac{1}{r} U'' \Big) = 0.$$

Die Funktion $\Psi(r) = \dfrac{1}{2} U(r) + \dfrac{1}{r} U'(r)$ genügt nunmehr der Differentialgleichung

$$r\Psi' = -n\Psi \quad \text{in} \quad (0, +\infty).$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\Psi(r) = C r^{-n}, \quad r > 0.$$

Folglich genügt U der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{r}{2} U(r) + U'(r) = C r^{1-n} \quad \text{in} \quad (0, +\infty).$$

Angenommen $C \neq 0$, O.B.d.A. $C > 0$. Nach Umformen der obigen Gleichung für U folgt

$$r^{n-1}U'(r) = C - \frac{r^n}{2}U(r).$$

Wegen $r^nU(r) \to 0$ für $r \to \infty$ (vgl. Prop. 5.13) findet man ein $r_0 > 0$ derart, dass $\frac{r^n}{2}U(r) \leq \frac{C}{2}$ für alle $r \geq r_0$ und mithin

$$U'(r) \geq \frac{Cr^{1-n}}{2} \quad \forall\, r \geq r_0$$

Folglich gilt für alle $r_0 \leq r < \rho < +\infty$

$$\int_r^\rho U'(s)ds = U(\rho) - U(r) \geq \frac{C\rho^{1-n}}{2}(\rho - r).$$

Wegen $U(\rho) \to 0$ für $\rho \to +\infty$ folgt $U(r) \leq 0$ für alle $r \geq r_0$. Setzt man insbesondere $\rho = r^{\frac{n}{n-1}}$ in die obige Ungleichung ein, so folgt

$$-U(r) \geq \frac{C}{2r^n}r(r^{\frac{1}{n-1}} - 1) - U(r^{\frac{n}{n-1}}) \quad \Rightarrow \quad -r^nU(r) \geq \frac{C}{2}r(r^{\frac{1}{n-1}} - 1).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $r^nU(r) \to 0$ für $r \to +\infty$. Also ist $C = 0$. Somit genügt U der Differentialgleichung

$$U' = -\frac{r}{2}U \quad \Longrightarrow \quad U(r) = Ce^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Sei $\phi(y,t) = \psi(y)\eta(t)$, wobei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \equiv 1$ auf B_1 und $\eta \in C_0^\infty([0,\infty))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $[0,1]$.

Da $Ct^{-n/2}U(|x|/t)$ Fundamentallösung ist, folgt mithilfe der Transformationsformel zusammen mit Bem. 5.12/2.

$$\begin{aligned} 1 = \psi(0)\eta(0) &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/2}U\Big(\frac{|y|}{\sqrt{t}}\Big)\psi(y,t)\eta(t)dy = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} U(|y|)\psi(y\sqrt{t})dy \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4}}dx, \end{aligned}$$

also

$$C\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4}}dx = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Dies impliziert die Behauptung. ∎

5.6 Das Cauchy-Problem

Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem in $\Omega = \mathbb{R}^n$ der Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
&(5.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f && \text{in} \quad Q_\infty = \mathbb{R}^n \times (0,\infty),\\
&(5.2) \qquad u(\cdot,0) = u_0 && \text{in} \quad \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Um weiter unten die Eindeutigkeit zu zeigen, ist das folgende Lemma nützlich

Lemma 5.16 (**Gronwall**) *Sei $\varphi \in C^1([a,b])$ und seien $f, g \in C^0([a,b])$.*

$$\varphi'(t) \leq f(t) + g(t)\varphi(t) \quad \forall\, t \in (a,b).$$

Dann gilt:

$$\varphi(t) \leq \varphi(a)e^{\int_a^t g(s)ds} + e^{\int_a^t g(s)ds} \int_a^t f(s)e^{-\int_a^s f(\sigma)d\sigma} ds.$$

Beweis 1° der Fall $f = 0, \varphi(a) = 0$. Wir nehmen an $\varphi(t_0) > 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$. Dann existiert ein $a' \in [a, t_0)$ so dass

$$\varphi > 0 \quad \text{in} \quad (a', t_0], \quad \varphi(a') = 0.$$

Auf der anderen Seite folgt aus der Voraussetzung,

$$(\log\varphi)'(t) \leq g(t) \leq \max_{[a,b]} g \quad \text{in} \quad (a', t_0].$$

Sei $t \in (a', t_0)$. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes existiert ein $\tau \in [t, t_0)$, so, dass

$$\log\varphi'(\tau) = \frac{\log\varphi(t_0) - \log\varphi(t)}{t_0 - t}.$$

Wegen $\varphi(t) \to 0$ für $t \to a'$ konvergiert die rechte Seite der obigen Gleichung gegen $+\infty$. Dies steht aber zum Widerspruch dazu, dass $(\log\varphi)'$ nach oben beschränkt ist. Folglich gilt die Behauptung $\varphi(t) \leq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

2° *Der allgemeine Fall*: Wir definieren

$$u(t) := \varphi(a)e^{\int_a^t g(s)ds} + e^{\int_a^t g(s)ds} \int_a^t f(s)e^{-\int_a^s f(\sigma)d\sigma} ds, \quad t \in [a,b].$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass $u \in C^1([a,b])$ Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung ist:

$$u' = f + gu \quad \text{in} \quad [a,b], \quad u(a) = \varphi(a).$$

Setzt man $w = \varphi - u$, so genügt w der Ungleichung

$$w' \leq gw \quad \text{in} \quad [a,b], \quad w(a) = 0.$$

Aus 1° folgt $w \leq 0$, woraus die Behauptung folgt. ■

Insbesondere gilt für $g = c_1, f = c_2$

$$\varphi' \leq c_1\varphi + c_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) \leq \varphi(a)e^{c_1 t} \;+\; e^{c_1 t}c_2 \int_0^t e^{-c_1 s} ds.$$

Satz 5.17 *Sei* $u \in \overline{K}(Q_\infty)$ *mit* $u(\cdot, 0) = 0$. *Außerdem nehmen wir an, es existiert ein* $\alpha > 0$*, so dass*

$$|u(x,t)| \leq Ce^{\alpha|x|^2} \quad \forall\,(x,t) \in Q_\infty.$$

Dann ist $u \equiv 0$.

Beweis Setzen $\beta = \alpha + 2$. Wir definieren $w = ue^{-\beta|x|^2}$. Dann folgt wegen

$$4\beta x \cdot \nabla w = -8\beta^2|x|^2 w + 4\beta x \cdot \nabla u e^{-\beta|x|^2}$$

die Identität

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w \;&=\; u_t e^{-\beta|x|^2} - \Delta u e^{-\beta|x|^2} + 2\beta n w - 4\beta^2|x|^2 w + 4\beta x \cdot \nabla u e^{-\beta|x|^2} \\ &= 4\beta x \cdot \nabla w + 2\beta n w + 4\beta^2|x|^2 w. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $2w$ integrieren über $\mathbb{R}^n \times (0,t)$ und wenden partielle Integration an. Dies liefert

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} w^2(t)dx + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dxds = \\ &= -4n\beta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} w^2 dxds + 2n\beta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} w^2 dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 8\beta^2|x|^2 w^2 dxds \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 8\beta^2|x|^2 w^2 dxds. \end{aligned}$$

Sei $1 < R < \infty$ beliebig. Notiere dass $re^{-r} \leq 1$ für $r > 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_R} w^2(\cdot,t)dx &\leq 8\beta^2 R^2 \int\limits_0^t \int\limits_{B_R} w^2 dxds + 8\beta^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\{|x|\geq R\}} |x|^2 e^{-2\beta|x|^2} u^2 dxds \\
&\leq 8\beta^2 R^2 \int\limits_0^t \int\limits_{B_R} w^2 dxds + 8\beta^2 \int\limits_{\{|x|\geq R\}} |x|^2 e^{-2(\beta-\alpha)|x|^2} e^{-2\alpha|x|^2} u^2 dx \\
&\underset{Vorauss}{\leq} 8\beta^2 R^2 \int\limits_0^t \int\limits_{B_R} w^2 dxds + C8\beta^2 C e^{-R^2} \int\limits_{\{|x|\geq 1\}} |x|^2 e^{-3|x|^2} dx \\
&\leq 8\beta^2 R^2 \int\limits_0^t \int\limits_{B_R} w^2 dxds + C' 8\beta^2 e^{-R^2}
\end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$. Wir definieren

$$\varphi(t) := \int\limits_0^t \int\limits_{B_R} w^2(x,s)dxds, \quad t \in [0,1].$$

Die obige Ungleichung schreibt sich dann in der Form

$$\varphi'(t) \leq 8\beta^2 R^2 \varphi(t) + 8\beta^2 C' e^{-R^2} \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Gemäß Lemma 5.16 folgt für $0 \leq t \leq 1$

$$\varphi(t) \leq 8\beta^2 C' e^{-R^2} e^{8\beta^2 R^2} \int\limits_0^t e^{-8\beta R^2 s} ds \leq C'' e^{8\beta R^2 t - R^2}.$$

Insbesondere ergibt sich für $0 \leq t \leq \frac{1}{16\beta}$

$$\varphi(t) \;\leq\; C'' e^{-R^2/2} \to 0 \quad \text{für} \quad R \to +\infty.$$

Die liefert

$$w(x,t) = 0 \quad \forall\, (x,t) \in \Big[0, \frac{1}{16\beta^2}\Big].$$

Hieraus folgt $u \equiv 0$. ∎

Wir definieren

$$V(Q_T) := \{u \in C^2(Q_T) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T)\,;\, \exists \alpha, C > 0 : |u| \leq Ce^{\alpha|x|^2}\}$$

$(0 < T \leq \infty)$

Satz 5.18 *Sei* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *mit* $|u_0(x)| \le c(1+|x|^m)$. *Dann gibt es genau eine Lösung in* $u \in V(Q_T)$ *von (5.1), (5.2) für* $f = 0$. *Diese Lösung hat dann die Darstellung*

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x-y,t)u_0(y)dy, & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u_0(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$

Beweis Wegen $\Gamma_0(x-\cdot) \in K(Q_\infty)$ folgt sofort $u \in K(Q_\infty)$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$u(x,t) \to u_0(x_0) \quad \text{für} \quad (x,t) \to (x_0, 0).$$

Unter Verwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral schließt man

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4}} dy = 1.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x_0) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,t)(u_0(x-y) - u_0(x_0))dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4}} (u_0(x-ty) - u_0(x_0))dy. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x_0| \le 1$ und sei $0 < \delta < 1$. Wir haben

$$|u_0(x-\delta y) - u_0(x_0)| \le C_0(1+|y|^m), \quad C_0 = \text{const}\,.$$

Wir wählen $R > 0$, so dass

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{|y|>R} e^{-\frac{|y|^2}{4}} C_0(1+|y|^m)dy \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u(x_0)| &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4}} |u_0(x-ty) - u_0(x_0)|dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{|y|>R} e^{-\frac{|y|^2}{4}} |u_0(x-ty) - u_0(x_0)|dy \\ &\qquad + \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{B_R} e^{-\frac{|y|^2}{4}} |u_0(x-ty) - u_0(x_0)|dy \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{B_R} e^{-\frac{|y|^2}{4}} |u_0(x-ty) - u_0(x_0)|dy. \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von u_0 findet man ein $\delta > 0$ so dass, $|u(z) - u(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $z \in B_\delta(x_0)$. Dann folgt für $x \in B_{\delta/2}(x_0)$ und $0 < t < \frac{\delta}{2R}$

$$|u_0(x - ty) - u_0(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und mithin

$$|u(x,t) - u(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in B_{\delta/2}(x_0), \quad 0 < t < \frac{\delta}{2R},$$

was die Aussage beweist. ∎

Auf $\mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir die parabolische Metrik

$$d((x,t),(y,s)) = \max\{|x-y|,\, |s-t|^{1/2}\}, \quad (x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definition 5.19 Sei $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nicht fallend, so dass

$$\int\limits_0^1 \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau < +\infty.$$

Eine Funktion $f \in C^0(Q_\infty)$ heißt *d-Dini-stetig* bezüglich μ, falls

$$|f(x,t) - f(y,s)| \leq \mu(d((x,t),(y,s))), \quad \forall\, (x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Bemerkung 5.20 1. Sei μ wie oben. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(2^{-k}) < 2 \int\limits_0^1 \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Denn wie man leicht sieht, gilt

$$\int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \geq (2^{-k+1} - 2^{-k}) \frac{\mu(2^{-k})}{2^{-k+1}} = \frac{1}{2}\mu(2^{-k}).$$

Summation beider Seiten über $k = 1$ bis ∞ liefert die Behauptung.

2. Sei $g \in C^0(\mathbb{R}^{n+1}) \setminus \{0,0\}$, so dass

$$|g(y,s)| \leq Cr^{-(n+2)} \quad \forall\, r \leq d((y,s),(0,0)) \leq 2r, t \geq 0.$$

Sei f d-Dini-stetig bezüglich μ. Dann

$$g(y,t)(f(x-y,t-s) - f(x,y)) \in L^1(Q_1(0,1)).$$

Wir definieren

$$A_k = Q_{2^{-k}}(0, 2^{-2k}) = \Big\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}; d((y,s),(0,0)) < 2^{-k} \text{ und } s \geq 0\Big\}$$

$(k = 1, 2, \ldots.)$ Dann haben wir

$$A_{k-1} \setminus A_k = \Big\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n-1}; 2^k \leq d((y,s),(0,0)) < 2^{-k+1}, s \geq 0\Big\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sei $(x,t) \in Q_\infty$. Gemäß der Voraussetzung an g und f bekommt man

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{A_{k-1}\setminus A_k} \Big|g(y,s)(f(x-y,t-s) - f(x,y))\Big| dyds \leq \\
&\leq \int\limits_{A_{k-1}\setminus A_k} |g(y,s)|\mu(d((y,s),(0,0)))dyds \\
&\leq C \int\limits_{A_{k-1}\setminus A_k} 2^{k(n+2)}\mu(2^{-k+1}) \\
&\leq C|Q_{2^{-k+1}}|2^{k(n+2)}\mu(2^{-k+1}) \leq C\mu(2^{-k+1}).
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_1(0,1)} \Big|g(y,s)f(x-y,t-s) - f(x,y))\Big| dyds \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{k-1}\setminus A_k} \Big|g(y,s)f(x-y,t-s) - f(x,y))\Big| dyds \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mu(2^{-k+1}) < +\infty.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.21 *Sei $f \in C_0^0(\overline{Q}_\infty)$ d -Dini-stetig bezüglich μ. Wir definieren*

$$u(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(y,s) f(x-y,t-s)dyds, \quad (x,t) \in Q_\infty.$$

Dann ist $u \in C^2(Q_\infty) \cap C^0(\overline{Q}_\infty)$ Lösung des Dirichlet-Problems (5.1)–(5.2) mit $u_0 = 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= f(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}\partial(y,s)(f(x-y,t-s) - f(x,t))dyds, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial x_i \partial x_j}(y,s)(f(x-y,t-s) - f(x,t))dyds, \quad i,j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Beweis 1. Sei $0 < r < \infty$. Sei $(y,s) \in Q_\infty$, mit $r \leq d((y,s),(0,0)) \leq 2r$. Unter Verwendung der Kettenregel und Produktregel bekommt man

$$|\partial_t \Gamma_0(y,s)| + |D_i D_j \Gamma_0(y,s)| \leq cs^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} + cs^{-\frac{n+2}{2}} \frac{|y|^2}{s} e^{-\frac{|y|^2}{4s}}.$$

(i) $\sqrt{s} \geq |y|$: Dann ist $r \leq \sqrt{s} \leq 2r$. Aus der obigen Ungleichung folgt

$$|\partial_t \Gamma_0(y,s)| + |D_i D_j \Gamma_0(y,s)| \;\leq\; c r^{-(n+2)}$$

(ii) $\sqrt{s} < |y|$: Dann ist $r \leq\, |x| \leq 2r$. Beachtet man außerdem

$$(\tau^{\frac{n+2}{2}} + \tau^{\frac{n+4}{2}}) e^{-\tau} \leq \kappa_0 < +\infty \quad \forall\, \tau \in [0,\infty),$$

so findet man mit $\tau = \frac{|y|^2}{s}$

$$|\partial_t \Gamma_0(y,s)| + |D_i D_j \Gamma_0(y,s)| \leq c|y|^{-(n+2)} (\tau^{\frac{n+2}{2}} + \tau^{\frac{n+4}{2}}) e^{-\tau} \leq c r^{-(n+2)}.$$

Folglich erfüllt Γ_0 die Voraussetzung von Bem 4.19, also

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_0 (f(x-\cdot, t-\cdot) - f(x,t)) &\in L^1(Q_1), \\ D_i D_j \Gamma_0 (f(x-\cdot, t-\cdot) - f(x,t)) &\in L^1(Q_1). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus den Eigenschaften der Fundamentallösung mithilfe einer Standardapproximation. ■

5.7 Analytische Eigenschaft kalorischer Funktionen

Satz 5.22 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 < T \leq \infty$ und $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Sei $u \in K(Q_T)$. Dann ist u analytisch in Q_T.*

Beweis Wir setzen die Fundamentallösung Γ_0 auf $t < 0$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit Γ_0. Aus der Eigenschaft der Fundamentallösung ergibt sich für $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_0(x-y, t-s)\phi_s - \Delta\phi \, dy ds \;=\; \phi(x,t) \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Sei $u \in K(Q_T)$. Sei $(x_0,t_0) \in Q_T$ fixiert. Sei $0 < r < \infty$, so dass $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega$ und $t_0 < T$. Sei $0 < t_1 < T$. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0) \times (0,T))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_r(x_0) \times [t_1, t_0]$ und definieren

$$\phi(y,s) \;=\; \eta(y,s) u(y,s), \quad (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann haben wir $\phi_s - \Delta\phi = 0$ in $B_r(x_0) \times (t_1, t_0)$. Mithilfe der obigen Identität und

Anwendung partieller Integration schließt man

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_0} \int_{B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-s)(\phi_s - \Delta\phi)dyds \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma_0(x-y,t-s)(\phi_s - \Delta\phi)dyds \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-s)(\phi_s - \Delta\phi)dyds \\
&\quad - \int_{t_0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x-y,t-s)(\phi_s + \Delta\phi)dyds \\
&\quad - \int_{-\infty}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x-y,t-s)(\phi_s + \Delta\phi)dyds \\
&= u(x,t) - \int_{t_1}^{t_0} \int_{\partial B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-s)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\Gamma(x-y,t-s)udSds \\
&\quad - \int_{B_r(x_0)} \Gamma_0(y-x,t-t_1)u(y,t_1)dy.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt, dass

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{t_1}^{t} \int_{\partial B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-s)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(y,s) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\Gamma_0(x-y,t-s)u(y,s)dSds \\
&\quad + \int_{B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-t_1)u(y,t_1)dy
\end{aligned}
$$

für alle $(x,t) \in Q_r(x_0,t_0)$. Dies zeigt, dass u in $Q_r(x_0,t_0)$ analytisch ist.

Ist $u \in \overline{K}(Q_T)$, so folgt aus der obigen Identität mit $t_0 \to T$ und $t_1 \to 0$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{0}^{t} \int_{\partial B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t-s)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(y,s) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\Gamma_0(x-y,t-s)u(y,s)dSds \\
&\quad + \int_{B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,t)u(y,t)dy
\end{aligned}
$$

für alle $(x,t) \in B_r(x_0) \times (0,T)$. Aus der Stetigkeit von u in T folgt

$$u(x,T) = \int_0^T \int_{\partial B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,T-s)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(y,s) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\Gamma_0(x-y,T-s)u(y,s)dSds$$
$$+ \int_{B_r(x_0)} \Gamma_0(x-y,T)u(y,T)dy \quad \forall\, x \in B_r(x_0).$$

Dies zeigt, dass $u(\cdot,T)$ analytisch in Ω ist. ■

5.8 Hilberträume

Sei H ein seperabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $|\cdot| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Ferner nehmen wir an, dass $\dim H = \infty$.

Definition 5.24 1. $\{v_i\}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j \in \mathbb{N}.$$

Ein ONS heißt *vollständig*, falls

$$\overline{\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots\}} = H.$$

Satz 5.25 *Sei $\{v_i\}$ ein ONS. Dann konvergiert für jedes $u \in H$ die Reihe*

$$Pu = \sum_{i=1}^{\infty} (u,v_i)v_i \quad \textit{absolut in} \quad H.$$

Darüber hinaus gilt die Besselsche Ungleichung

$$|Pu|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(u,v_i)|^2 \le |u|^2.$$

Beweis Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $P_k u := \sum_{i=k}^{l} (u,v_i)v_i$. Aus der Definition des ONS folgt

$$(P_k u, u) = \Big(\sum_{i=1}^{k} (u,v_i)v_i, u\Big) = \sum_{i=1}^{k} |(u,v_i)|^2$$
$$|P_k u|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{k} (u,v_i)v_i, \sum_{j=1}^{k} (u,v_j)v_j\Big) = \sum_{i=1}^{k} |(u,v_i)|^2 = (P_k u, u).$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$|P_k u|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{k} |(u, v_i)|^2 \;=\; (P_k u, u) \;\leq\; |P_k u||u|.$$

Also

$$|P_k u|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{k} |(u, v_i)|^2 \;\leq\; |u|^2.$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(u, v_i)|^2$ konvergent, und es gilt die Besselsche Ungleichung.

Nun seien $k, l \in \mathbb{N}, l < k$. Dann folgt aus der Eigenschaft des ONS

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=k}^{l}(u, v_i)v_i\Big|^2 \;&=\; \Big(\sum_{i=k}^{l}(u, v_i)v_i, \sum_{j=k}^{l}(u, v_j)v_j\Big) \\ &=\; \sum_{i=k}^{l} |(u, v_i)|^2 \to 0 \quad \text{für} \quad k, l \to \infty. \end{aligned}$$

Also ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u, v_i)v_i$ absolut konvergent in H. ■

Satz 5.26 *Sei $\{v_i\}$ ein ONS in H. Dann sind äquivalent:*

(i) $\{v_i\}$ *ist vollständig;*

(ii) $u \;=\; \sum\limits_{i=1}^{\infty}(v, u_i)u_i \quad \forall\, u \in H$*;*

(iii) $|u|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |(v, u_i)|^2 \quad \forall\, u \in H$*;*

(iv) *Ist $u \in H$ mit $(u, v_i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$, so gilt $u = 0$.*

Beweis *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Sei $\{v_i\}$ ein vollständiges ONS. Wir setzen $w = Pu - u$. Da $\{v_i\}$ ein ONS ist, haben wir

$$(w, v_i) \;=\; 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Auf der anderen Seite existiert eine Folge $\{w_k\}$ in $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots\}$ mit

$$w_k \to w \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Dann folgt

$$0 \;=\; (w, w_k) \to (w, w) = |w|^2 \quad \text{für} \quad k \to \infty \quad\Longrightarrow\quad w = 0.$$

Dies zeigt, dass $Pu = u$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Aus Satz 5.25 folgt

$$|u|^2 = |Pu|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(u, v_i)|^2.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei $u \in H$ mit $(u, v_i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$. Aus (iii) folgt

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(u, v_i)|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $u \in H \ominus \overline{\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots\}}$. Insbesondere gilt $(u, v_i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Gemäß (iv) ergibt sich $u = 0$. ■

Definition 5.27 H' bezeichne die Menge aller stetigen linearen Funktionale $f : H \to \mathbb{R}$. Der Raum H' wird mit der folgenden Norm versehen

$$|f|_* := \sup_{\substack{v \in H \\ |v|=1}} |f(v)|.$$

Satz 5.28 (**Rieszscher Darstellungssatz**) *Für jedes $f \in H'$ existiert genau ein $u \in H$, so dass*

$$f(u) \;=\; (u, v) \quad \forall\, v \in H.$$

Außerdem gilt $|u| = |f|_*$. Das Element u heißt dann die Rieszsche Darstellung von f und wird auch mit Rf bezeichnet.

Beweis Sei $f \in H'$. Wir betrachten das Funktional $F : H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(v) := |v|^2 - 2f(v) + |f|_*^2, \quad v \in H.$$

Aus $f(v) \leq |f|_* |v|$ folgt $F \geq 0$. Nun sei (v_n) eine Folge in H mit $|v_n| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} f(v_n) = |f|_*$. Setzt man $u_n = |f|_* v_n$, so ergibt sich $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = |f|_*^2$. Dies impliziert

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} (|u_n|^2 - 2f(u_n) + |f|_*^2) \;=\; 0.$$

Auf der anderen Seite folgt mit Hilfe der Parallelogrammidentität

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 \;=\; 2|x|^2 + 2|y|^2 \quad \forall\, x, y \in H$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}|u_n - u_m|^2 &= \frac{1}{2}|u_n|^2 + \frac{1}{2}|u_m|^2 - \left|\frac{u_n + u_m}{2}\right|^2 \\ &= \frac{F(u_n) + F(u_m)}{2} - F\Big(\frac{u_n + u_m}{2}\Big) \\ &\le \frac{F(u_n) + F(u_m)}{2} \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty,\end{aligned}$$

was zeigt, dass $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge in H ist. Wegen der Vollständigkeit von H existiert ein $u \in H$ mit $u_n \to u$ in H für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit von f folgt also

$$f(u) = |f|_*^2 = |u|^2.$$

Sei $v \in H$ beliebig. Dann folgt für ein bliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}2t(f(v) - (u, v)) &= (2f(u + tv) - 2(u + tv, u)) \\ &= -F(u + tv) + |u + tv|^2 + |u|^2 - 2(u + tv, u) \\ &\le |u + tv|^2 - 2(u + tv, u) + |u|^2 = t^2|v|^2.\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung schließt man unmittelbar $f(v) = (u, v)$.

Alternativer Beweis: Sei $f \in H' \setminus \{0\}$. Wir setzen $N := f^{-1}(\{0\})$. Wir betrachten $U = N^\perp = \{u \in H\,;\, (u, w) = 0 \ \forall\, w \in N\}$. Wir zeigen zunächst, dass $\dim U = 1$. Hierfür seien $u_1, u_2 \in U$. O.B.d.A. ist $f(u_2) \neq 0$. Dann folgt mit $\lambda = -\frac{f(u_1)}{f(u_2)}$ die Gleichung $f(u_1) + \lambda f(u_2) = 0$. Dies impliziert $f(u_1 + \lambda u_2) = 0$, also $u_1 + \lambda u_2 \in N \cap U = \{0\}$. Somit gilt $u_1 = -\lambda u_2$. Also sind u_1, u_2 linear unabhängig.

Weiter zeigen wir $U \neq \{0\}$. Sei $v \in H \setminus N$. Da f stetig ist, ist N ein abgeschlossener

Unterraum von H. Dann existiert ein $w_0 \in N$, so dass

$$|v - -w_0|^2 = \min_{w \in N} |v - w|^2.$$

Für dieses Minimum gilt $(v - w_0, w) = 0$ für alle $w \in N$. Also ist $a = v - w_0 \in U \setminus \{0\}$. Wir setzen

$$u = \frac{a}{|a|^2} f(a).$$

Elementar berechnet man

$$|u|^2 = f(u) = \frac{f(a)^2}{|a|^2}.$$

Sei $v \in$. Wegen $H = N \oplus U$ und $\dim U = 1$ existieren $w \in N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $v = w + \lambda u$. Wir berechnen:

$$(u, v) = (u, w + \lambda u) = \lambda |u|^2 = \lambda f(a)^2/|a|^2.$$

Auf der anderen Seite berechnet man

$$f(v) = f(w + \lambda u) = \lambda f(u) = \lambda f(a)^2/|a|^2 = (u, v).$$

Insbesondere, $f(v) \leq |u||v|$ für alle $v \in H$, also $|f|_* \leq |u|$. Weiterhin folgt aus $f(u) = |u|^2$, dass $|f|_* \leq |u|$. Folglich

$$|f|_*^2 = (f, u) = |u|^2.$$

■

Definition 5.29 1. Eine Folge (f_n) in H' heißt *schwach konvergent*, falls ein $f \in H'$ existiert, so dass

$$f_n(v) \to f(v) \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \forall\, v \in H.$$

In diesem Fall schreibt man kurz

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad H' \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

2. Eine Folge (u_n) in H konvergiert schwach gegen ein $u \in H$, falls

$$(u_n, v) \to (u, v) \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \forall\, v \in H.$$

In diesem Fall schreibt man

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Bemerkung 5.30 1. $f_n \rightharpoonup f$ in H' genau dann, wenn $Rf_n \rightharpoonup Rf$.
2. Unter Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes folgt: $u_n \rightharpoonup u$ in H genau dann wenn

$$f(u_n) \to f(u) \quad \text{für} \quad n \to +\infty \quad \forall\, f \in H'.$$

Satz 5.31 *Sei (u_n) in H beschränkt. Dann existiert ein $u \in H$ und eine Teilfolge (u_{n_k}) so, dass*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad H \quad \textit{für} \quad k \to +\infty.$$

Beweis Sei $U_N = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_N\}$. Dann $\dim U_N \leq N$. Wir setzen $U := \operatorname{span}\{u_n; n \in \mathbb{N}\} = \cup_{N=1}^{\infty} U_N$. Ferner sei $V = U^\perp = H \ominus \overline{U}$, so dass $H = \overline{U} \oplus V$, wobei die Summe orthogonal ist. Mit $P_N : H \to H$ bezeichnen wir die Projektion von H auf U_N, das heißt $P_N^2 = P_N$ $(P_N v, u) = (P_N u, v)$ für alle $u, v \in H$ und $P_N(H) = U_N$.

Wir definieren rekursiv Teilfolgen (n_k^N) der natürlichen Zahlen, so dass (n_k^N) eine Teilfolge von (n_k^{N-1}) ist und $(P_N u_{n_k^{(N)}})$ in U_N konvergiert. In der Tat, da $(u_{n_k^{N-1}})$ in

H beschränkt ist, ist auch $(P_N u_{n_k^{N-1}})$ in U_N beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine in U_N konvergente Teilfolge $(P_N u_{n_k^N})$. Insbesondere gilt für alle $v \in U_N$

$$(u_{n_k^N}, v) \;=\; (P_N u_{n_k^N}, v) \quad \text{konvergiert in } \mathbb{R}.$$

Betrachten die Diagolnalfolge $(u_{n_k^k})$. Wir definieren ein Funktional $f_0 : U \to \mathbb{R}$, durch folgende Vorschrift. Sei $v \in U$, das heißt $v \in U_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(u_{n_k^k})_{k \geq N}$ eine Teilfoge von $(u_{n_k^N})_{k \geq N}$, was bedeutet, dass $(u_{n_k^k}, v)$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Wir setzen

$$f_0(v) := \lim_{k\to\infty} (u_{n_k^k}, v).$$

Offensichtlich ist f_0 linear und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|f_0(v)| \leq |u_{n_k^k}||v| \leq C|v|.$$

Also ist f_0 beschränkt (stetig). Dann gibt es ein eindeutige Fortsetzung $f \in H^*$, so dass $f(v) = 0$ für alle $v \in V$. Wir setzen $u = R(f)$. Sei $v = v_1 + v_2 \in H$. Mit $v_1 \in \overline{U}$ und $v_2 \in V$. Dann existiert eine Folge (v_N) mit $v_N \in U_N$ und $v_N \to v_1$. Dann folgt wegen $(u, v) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) = f(v_N) + f(v - v_N)$

$$|(u_{n_k^k}, v) - (u, v)| \leq |(u_{n_k^k}, v) - f(v_N)| + |f|_*|v - v_N|.$$

Hieraus folgt $(u_{n_k^k}, v) \to (u, v)$ für alle $v \in H$, also

$$u_{n_k^N} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad H.$$

■

Satz 5.32 *Sei (u_n) in H schwach konvergent. Dann ist (u_n) in H beschränkt.*

Beweis Wir nehmen an (u_n) ist unbeschränkt. O.B.d.A. $u_n \rightharpoonup 0$ in H für $n \to +\infty$. Sonst ersetze man u_n durch $u_n/|u_n|^{1/2}$. Wir wählen eine Teilfolge (u_{n_k}), so dass $(u_{n_k}, u_{n_l}) \leq 1$ für alle $k \neq l$ und $|u_{n_k}| \geq k^3$. Wir setzen $v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{u_{n_k}}{|u_{n_k}|^{3/2}}$. Wegen $\left|\frac{u_{n_k}}{|u_{n_k}|^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{k^{3/2}}$ konvergiert diese Reihe in H. Auf der anderen Seite erhalten wir

$$(u_{n_k}, v) \;=\; \sum_{l \neq k} \frac{(u_{n_k}, u_{n_l})}{|u_{n_l}|^{3/2}} + \frac{|u_{n_k}|^2}{|u_{n_k}|^{3/2}} \geq k^{3/2} - \sum_{l \neq k} \frac{1}{l^{9/2}} \to +\infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $u_{n_k} \rightharpoonup 0$. ■

Sei V ein weiterer Hilbertraum mit Skalarprodukt $((\cdot,\cdot))$ und Norm $\|\cdot\| = ((\cdot,\cdot))^{1/2}$. Sei $i : V \hookrightarrow H$, das heißt

$$\|i\| := \sup_{v \in V, \|v\| \leq 1} |v| < +\infty.$$

Hierbei heißt $\|i\|$ Einbettungskonstante der Einbettung $i : V \to H$. Ferner nehmen wir an, dass V in H dicht ist. Wir definieren $i^* : H' \to V'$, durch

$$i^*(f)(v) = f(i(v)) = f(v), \quad v \in V.$$

Wegen der Stetigkeit von i folgt

$$|i^*(f)(v)| \leq |f(i(v))| \leq \|i\| \, |f|_* \|v\| \quad \Longrightarrow \quad \|i^*(f)\|_* \leq \|i\| \, |f|_*.$$

Ist $i^*(f) = 0$, so folgt aus der Dichtheit von V in H, dass $f = 0$. Somit ist i^* injektiv. Wir haben also $i^* : H' \hookrightarrow V'$.

Wir definieren $J := R^{-1} : H \to H'$. Aus der Definition von R folgt

$$J(u)(v) \; = \; (R(J(u)), v) = (u, v) \quad u, v \in H.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist J ein isometrischer Isomorphismus. In den folgenden Betrachtungen schreiben wir $H \cong H'$ vermöge J. Wir erhalten somit das folgende Raumtripel

$$V \overset{i}{\hookrightarrow} H \cong H' \overset{i^*}{\hookrightarrow} V'.$$

Ferner gilt die Identität

$$i^*(J(u))(v) \; = \; J(u)(i(v)) \; = \; (u, v) \quad \forall\, u \in H, \forall\, v \in V.$$

Lemma 5.33 *Sei $\{u_n\}$ eine beschränkte Folge in V, mit*

$$u_n \to u \quad \textit{in} \quad H \quad \textit{für} \quad n \to +\infty.$$

Dann ist $u \in V$ und es gilt:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad V \quad \textit{für} \quad j \to +\infty.$$

Beweis Nach Lemma 5.31 Existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) und eine Funktion $\widetilde{u} \in V$ mit

$$f(u_{n_k}) \rightharpoonup f(\widetilde{u}) \quad \forall\, f \in V' \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Sei $v \in V$. Dann ist $f = i^*(J(v)) \in V'$. Also gilt:

$$\begin{aligned}(v, \widetilde{u}) = (v, i(\widetilde{u})) &= J(v)(i(\widetilde{u})) = \\ &= f(\widetilde{u}) = \lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (v, u_{n_k}) = (v, u).\end{aligned}$$

Da V in H dicht liegt, folgt $\widetilde{u} = u$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad V \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

■

Wir nehmen nun an, dass die Einbettung $i : V \hookrightarrow H$ kompakt ist, d.h. Ist (u_n) in V beschränkt, so existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in H$, so dass

$$u_{n_k} \to u \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Lemma 5.34 *1. Es exististiert ein $u \in V$ mit $\|u\| = 1$, so dass*

$$|u| = \|i\| \;=\; \max_{v \in V, \|v\|=1} |v|.$$

2. Für $\lambda := \|i\|^2$ gilt:

$$|u|^2 = \lambda \|u\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u,v) = \lambda((u,v)) \quad \forall\, v \in V.$$

3. Die Menge $E := \{u \in V; |u|^2 = \lambda\|u\|\}$ ist ein Untervektorraum von V mit $\dim E < \infty$.

Beweis 1. Aus der Definition der Norm $\|i\|$ folgt die Existenz einer Folge (u_n) in V mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| \;=\; \|i\|.$$

Wegen $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$ und Lemma 5.33 existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in V$, so dass

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\to u \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad k \to +\infty \\ u_{n_k} &\rightharpoonup u \quad \text{in} \quad V \quad \text{für} \quad k \to +\infty. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Norm folgt $|u| \;=\; \|i\| > 0$ und aus der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm folgt $\|u\| \le 1$. Auf der anderen Seite haben wir

$$|u| \le \|i\|\|u\| = |u|\|u\| \quad \Longrightarrow \quad \|u\| \ge 1.$$

Also ist $\|u\| = 1$.

2. $\Rightarrow$: Sei $u \in V$ mit $|u|^2 = \lambda\|u\|^2$. Falls $u = 0$, so ist die Aussage trivial. Wir können also annehmen, dass $u \neq 0$. Sei $v \in V$ beliebig gewählt. Sei $\delta > 0$, so dass $\|u+tv\| > 0$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$. Aufgrund der Maximalitätseigenschaft von u folgt

$$\lambda = \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \ge \Phi(t) := \frac{|u+tv|^2}{\|u+tv\|^2} \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta).$$

Folglich gilt.

$$0 \;=\; \Phi'(0) \;=\; \frac{2(u,v)}{\|u\|^2} - \frac{2|u|^2((u,v))}{\|u\|^4} \;=\; \frac{2(u,v)}{\|u\|^2} - \frac{2\lambda((u,v))}{\|u\|^2}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

$\Leftarrow$: Folgt sofort mit $v = u$.

3. Aus 2. folgt sofort, dass E ein abgeschlossener Untervektorraum von V ist. Wäre $\dim E = \infty$, so existiert ein unendliches ONS $\{u_i\}$ in E. Aus der Definition von E und 2. folgt

$$(u_i, u_j) \;=\; \lambda((u_i, u_j)) \;=\; \lambda\delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere wäre $\{u_i\}$ nicht präkompakt in H. Dies ist aber ein Widerspruch zu $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$. Folglich gilt $\dim E < \infty$. ■

Definition 5.35 Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* der Einbettung $i : V \hookrightarrow H$, falls ein $u \in V \setminus \{0\}$ existiert, so dass

$$(u, v) \;=\; \lambda((u, v)) \quad \forall\, v \in V.$$

Hierbei heißt u Eigenvektor zu λ. Die Menge aller Eigenvektoren $E(\lambda)$ ist ein Untervektorraum von V und heißt Eigenraum.

Satz 5.36 *Für die Eigenwerte von $i : V \to H$ gilt:*

(i) $\dim E(\lambda) < \infty$ *für jeden Eigenwert λ.*

(ii) $E(\lambda) \perp E(\mu)$ *(sowohl in V als auch in H) für verschiedene Eigewerte λ, μ.*

Beweis (i) Analog wie im Beweis von Lemma 5.34/3.

(ii) Seien λ, μ zwei verschiedene Eigenwerte von i. Seien $u \in E(\lambda)$ und $v \in E(\mu)$. Dann

$$\begin{aligned}(u, v) = \mu((u, v)) = \lambda((u, v)) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\mu - \lambda)((u, v)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (u, v) = ((u, v)) = 0.\end{aligned}$$

Notation $k(\lambda) := \dim E(\lambda)$ heißt Viefachheit von λ.

Satz 5.37 *Seien H und V Hilberträume (wie oben) mit $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$. Dann existiert eine fallende Folge von Eigenwerten*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m \geq \ldots > 0,$$

so dass in dieser Folge jeder Eigenwert λ genau $k(\lambda)$–mal vorkommt. Ferner existiert ein vollständiges ONS $\{u_i\}$ in V, so dass u_i eine Eigenfunktion von μ_i ist.

Beweis Setzen $\lambda_0 = \|i\|^2$. Aus Lemma 5.34/2. folgt, dass λ_0 ein Eigenwert von i ist. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein weiterer Eigenwert und $u \in V \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$|u|^2 = \lambda \|u\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \leq \|i\|^2 = \lambda_0.$$

Dies zeigt, dass $\lambda_0 > 0$ der größte Eigenwert ist. Wir setzen

$$\mu_1 = \ldots = \mu_{k(\lambda_0)} = \|i\|^2.$$

Ferner sei $\{u_1, \ldots, u_{k(\lambda_0)}\}$ ein vollständiges ONS von $E(\lambda_0)$.

Nun setzen wir $V_1 = V \ominus E(\lambda_0)$ und $H_1 = H \ominus E(\lambda_0)$, so dass

$$V = V_1 \oplus E(\lambda_0), \quad H = H_1 \oplus E(\lambda_0) \quad (\text{ Summen orthogonal }).$$

Wir zeigen, dass $i_1 = i|_{V_1} : V_1 \hookrightarrow H_1$ kompakt ist. Sei $v \in V_1$. Dann bekommt man

$$(v, w) = \lambda_0((v, w)) = 0 \quad \forall\, w \in E(\lambda_0).$$

Dies impliziert $v \in H_1$. Offensichtlich ist die Einbettung stetig mit $\|i_1\| < \|i\|$. Denn sonst gäbe es nach Lemma 5.34 ein $u \in V_1 \setminus \{0\}$ mit $|u|^2 = \lambda_0 \|u\|^2$, also $u \in E(\lambda_0) \cap V_1 = \{0\}$. Dies widerspricht jedoch $u \neq 0$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass i_1 kompakt ist. Sei (v_n) eine in V_1 beschränkte Folge. Dann ist diese Folge in V beschränkt. Da V in H kompakt eingebettet ist, gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}), welche in H konvergiert. Sicherlich konvergiert diese Folge dann auch in H_1. Damit ist i_1 kompakt.

Wir setzen $\lambda_1 := \|i_1\|^2$. Dann folgt aus Lemma 5.35 die Existenz eines $u \in V_1$ mit $\|u\| = 1$ und

$$(u, v) = \lambda_1((u, v)) \quad \forall\, v \in V_1.$$

Sei $v \in V$ belibig. Wegen $V = V_1 \oplus E(\lambda_0)$ existieren $v_1 \in V_1$ und $v_0 \in E(\lambda_0)$, so dass $v = v_1 + v_0$. Aus Satz 5.36 folgt $(u, v_0) = ((u, v_0)) = 0$ und mithin

$$(u, v) = (u, v_0 + v_1) = (u, v_1) = \lambda((u, v_1)) = \lambda(u, v).$$

Somit ist λ_1 ein Eigenwert von i. Wir setzen

$$\mu_{k(\lambda_0)+1} = \ldots = \mu_{k(\lambda_0)+k(\lambda_1)} = \lambda_1.$$

Außerdem seien $u_{k(\lambda_0)+1}, \ldots, u_{k(\lambda_0)+k(\lambda_1)}$, so dass $\{u_{k(\lambda_0)+1}, \ldots, u_{k(\lambda_0)+k(\lambda_1)}\}$ ein ONS von $E(\lambda_1)$ ist.

Wir setzen $V_2 = V_1 \ominus E(\lambda_1)$ und $H_2 = H_1 \ominus E(\lambda_1)$ so, dass

$$V = V_2 \oplus E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2), \quad H = H_2 \oplus E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \quad (\text{ Summe orthogonal}).$$

Wie oben zeigt man, dass $i_2 := i|_{V_2} : V_2 \hookrightarrow H_2$ kompakt ist und dass, $\lambda_2 := \|i_2\|^2 < \|i_1\|$ ebenfalls ein Eigenwert von i ist. Nun sei $\{u_{k(\lambda_0)+k(\lambda_1)+1}, \ldots, u_{k(\lambda_0)+k(\lambda_1)+k(\lambda_2)}\}$ eine orthonomal Basis des Eigenraumes $E(\lambda_2)$.
Setzt man das obige Verfahren iterativ fort so erhalten wir eine absteigende Folge $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_m > \ldots$ von Eigenvektoren und eine absteigende Folge von abgeschlossenen Unterräumen $V \supset V_1 \supset \ldots \supset V_m \supset$ und $H \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m \supset$, so dass

$$V = V_m \oplus \bigoplus_{k=0}^{m-1} E(\lambda_k), \qquad H = H_m \oplus \bigoplus_{k=0}^{m-1} E(\lambda_k).$$

und $i_m := i|_{V_m} : V_m \hookrightarrow H_m$ eine kompakte Einbettung ist, so dass $\lambda_m = \|i_m\|^2$. Wir setzen $N_m = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k(\lambda_k)$. Dann existiert eine orthonomal Basis $\{u_{N_m+1}, \ldots, u_{N_{m+1}}\}$ des Eigenraumes $E(\lambda_m)$. Wir setzen $\mu_k = \lambda_m$ für $k = N_m + 1, \ldots, N_{m+1}$.

Wir zeigen nun, dass $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$. Sonst gäbe es ein $\alpha > 0$, so dass $\mu_k \geq \alpha > 0$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann wäre

$$(u_k, u_l) = \mu_k \delta_{kl} \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}.$$

und $|u_k|^2 = \mu_k \geq \alpha$ für alle $k \in N$. Dies impliziert

$$|u_k - u_l|^2 = |u_k|^2 + |u_l|^2 \geq 2\alpha \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}, k \neq l.$$

Also hätte (u_k) keine in H konvergente Teilfolge, was aber der Kompaktheit von i widerspricht, da (u_k) in V beschränkt ist. Somit muss $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$ richtig sein.

Sei $v \in V$. Dann haben wir für $m \in \mathbb{N}$

$$v = v_m + w_m = \sum_{i=1}^{N_m} ((v, u_i))u_i + \Big(v - \sum_{i=1}^{N_m} ((v, u_i))u_i\Big).$$

Aus der obigen Definition folgt $w_m \in V_m$, also

$$|w_m|^2 \leq \lambda_m \|w_m\|^2 \leq \lambda_m \|v\|^2 \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Folglich

$$v_m = \sum_{i=1}^{N_m} ((v, u_i))u_i \to v \quad \text{in} \quad V \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Gemäß Satz 5.26 ist $\{u_i\}$ ein vollständiges ONS in V. ■

5.9 Eigenwerte des Laplace-Operators

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Seien $H = L^2(\Omega)$ und $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ Hilberträume versehen mit dem folgenden Skalarprodukten, bzw. Normen:

$$\begin{aligned} (u, v) &= (u, v)_H = \int_\Omega uv dx, \quad |u| = \|u\|_H = \Big(\int_\Omega |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ ((u, v)) &= ((u, v))_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \|u\| = \|u\|_V = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.36 Nach dem Satz von Rellisch haben wir $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$. Außerdem ist die Einbettung $V \hookrightarrow H$ dicht. Somit haben wir das Raumtripel

$$V \overset{i}{\hookrightarrow} H \cong H^* \overset{i^*}{\hookrightarrow} H.$$

(Siehe Abschnitt 5.8).

Defintion 4.37 Eine reelle Zahl λ heißt *Eigenwert* von $-\Delta$, falls es ein $u \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$((u, v)) = \lambda(u, v) \quad \forall\, v \in V,$$

was äquivalent zu der folgenden Integralidentität ist

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int\limits_\Omega uv dx \quad \forall\, v \in V.$$

Mit anderen Worten, $u \in V$ ist schwache Lösung der Helmholtz-Gleichung und heißt *Eigenfunktion* zu λ.

Bemerkung 5.38 1. Aus der Regularitätstheorie (vgl. Abschnitt 4.4) folgt $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Falls $\partial\Omega \in C^\infty$, so ist $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (vgl. Folg. 4.32).

2. Aus der Definition 5.37 sieht man, dass λ Eigenwert von $-\Delta$ ist, genau dann, wenn ein $u \in V \setminus \{0\}$ existiert, so dass

$$(u, v) \;=\; \frac{1}{\lambda}((u, v)) \quad \forall\, v \in V,$$

also genau dann wenn $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert der Einbettung $i : V \to H$ ist. Insbesondere folgt aus Satz 5.35, dass die Eigenräume $E(\lambda)$ mit den Eigenräumen $E(\lambda^{-1})$ der Einbettung i übereinstimmen, und somit endlichdimensional sind. Wir setzen $k(\lambda) = k(\lambda^{-1}) = \dim E(\lambda)$. $\square$

Unmittelbar aus Satz 5.35 folgert man

Satz 5.39 *Es existiert eine monoton wachsende Folge von Eigenwerten*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots \to +\infty$$

von $-\Delta$, wobei jeder Eigenwert λ in dieser Folge $k(\lambda)$–mal vorkommt. Außerdem existiert ein vollständiges ONS $\{\varphi_k\}$ von V, so dass φ_k eine Eigenfunktion von λ_k ist. Ferner ist $\{\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\}$ ein vollständiges ONS von H.

Beweis Gemäß Satz 5.35 existiert eine Folge von positiven Eigenwerten $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m \ldots \to 0$ der Einbettung $i : V \to H$ und ein vollständiges ONS $\{\varphi_k\}$ von V, derart, dass φ_i Eigenfunktion zu dem Eigenwert μ_k ist. Setzt man $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$, so ist

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$ eine Folge von Eigenwerten von $-\Delta$ mit $\lambda_k \to +\infty$. Offensichtlich ist φ_k eine Eigenfunktion von λ_k für alle $k \in \mathbb{N}$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\{\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\}$ ein vollständiges ONS von H ist. In der Tat, haben wir

$$(\sqrt{\lambda_k}\varphi_k, \sqrt{\lambda_l}\varphi_l) = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_k}\delta_{kl} = \delta_{kl}.$$

Also ist $\{\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\}$ ein ONS in H. Nun sei $u \in H$ mit $(u, \varphi_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\{\varphi_k\}$ in V vollständig ist und $V \hookrightarrow H$, folgt $(u, v) = 0$ für alle $v \in V$. Aufgrund der Dichtheit von V in H ergibt sich $u = 0$. Gemäß Satz 5.26 ist $\{\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\}$ vollständig in H. ■

Anwendung Sei $f \in H$. Gemäß Satz 5.39 haben wir die Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, \varphi_k)\varphi_k \quad \text{in} \quad H.$$

Wir definieren

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k, \quad u_m := \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Aus der Definition von $\{\lambda_k\}$ und $\{\varphi_k\}$ folgt

$$((u_m, v)) = \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k)((\varphi_k, v)) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (f, \varphi_k)(\varphi_k, v) = (f, v) \leq |f||v|$$

für jedes $v \in V$. Mit $v = u_m$ folgt $\|u_m\| \leq |f|$. Dies zeigt, dass $u \in V$ mit $\|u\| \leq |f|$. Außerdem gilt

$$((u, v)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, \varphi_k)(\varphi_k, v) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, \varphi_k)\varphi_k, v\Big) = (f, v) \quad \forall\, v \in V.$$

Folglich ist $u \in V$ schwache Lösung der Poisson-Gleichung.

Satz 5.40 *Sei Ω ein Gebit mit C^2-Rand. Der Eigenwert λ_1 hat die Vielfachheit 1. Ist $\varphi \in E(\lambda_1)$ nicht identisch null, so gilt $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$ oder $\varphi(x) < 0$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis Sei $\varphi \in E(\lambda_1)$ und $\varphi \neq 0$. Wir nehmen an, es existiert ein $x_0 \in \Omega$, so dass $\varphi(x_0) = 0$. Die Funktion $\varphi^+ := \max\{\varphi, 0\}$ gehört zu V und es gilt:

$$\|\varphi^+\|^2 \;=\; ((\varphi, \varphi^+)) \;=\; \lambda_1(\varphi, \varphi^+) \;=\; \lambda_1|\varphi^+|^2.$$

Wegen $\frac{1}{\lambda_1} = \|i\|^2$, folgt aus Lemma 5.32/2., dass

$$(\varphi^+, v) \;=\; \frac{1}{\lambda_1}((\varphi^+, v)) \quad \forall\, v \in V.$$

Folglich ist φ^+ eine Eigenfunktion von λ_1. Wegen $\varphi^+(x_0) = 0$ hat φ^+ ein Minimum in x_0. Da $-\Delta\varphi^+ = \lambda_1\varphi^+ \geq 0$. Insbesondere ist φ^+ superharmonisch. Gemäß des starken Minimumprinzips folgt $\varphi^+ \equiv 0$.

Analog zeigt man, dass $\varphi^- := \min\{u, 0\} \equiv 0$ ist. Dann wäre $\varphi \equiv 0$, was aber $\varphi \neq 0$ widerspricht. Somit hat φ keine Nullstelle in Ω. Da Ω ein Gebiet ist und φ stetig ist folgt entweder $\varphi(x) > 0$ oder $\varphi(x) < 0$ für alle $x \in \Omega$.

Nun seien $\varphi, \psi \in E(\lambda_1)$ beide nicht null. Sei $x_0 \in \Omega$. Wir setzen

$$v(x) \;=\; \varphi(x) - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Offensichtlich ist $v \in E(\lambda_1)$ mit $v(x_0) = 0$. Dies impliziert aber $v \equiv 0$, also

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi(x).$$

Folglich ist $k(\lambda_1) = 1$. ∎

5.10 Wärmeleitungsgleichung in beschränkten Gebieten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. Sei $0 < T \leq +\infty$. Wir definieren $Q := \Omega \times (0, T)$ und betrachten die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \;&=\; f \quad \text{in} \quad Q, \\ u \;&=\; 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) \;&=\; u_0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{aligned}$$

Hierbei ist $u : Q \to \mathbb{R}$ (Temeratur), $f : Q \to \mathbb{R}$ (Energiequelle), $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ (Anfangstemperaturverteilung).

Schwache Lösung: Wir definieren

$$H := L^2(\Omega), \quad V := W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei H mit $(\cdot, \cdot)$ und V mit $((\cdot, \cdot))$ zu einem Hilbertraum wird. Dann ist $i : V \to H$ kompakt und dicht. Wie oben haben wir

$$V \overset{i}{\hookrightarrow} H \cong H^* \overset{i^*}{\hookrightarrow} H.$$

Um die Zeitvariable zu berücksichtigen definieren wir die folgenden Hilberträume auf dem Zylinder Q.

$$\mathscr{H} := L^2(Q), \quad (u,v)_{\mathscr{H}} = \int\limits_Q uv dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (u(t)v(t))dt, \quad u,v \in \mathscr{H},$$

$$\mathscr{V} := L^2(Q), \quad ((u,v))_{\mathscr{V}} = \int\limits_Q Du \cdot Dv dxdt \ = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega ((u(t)v(t)))dt, \quad u,v \in \mathscr{V},$$

Schließlich sei $W^{1,2}(Q)$ der übliche Sobolevraum. Offensichtlich ist $W^{1,2}(Q)$ der Raum aller $u \in \mathscr{V}$ mit $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$.

Definition 5.41 Sei $f \in \mathscr{H}, u_0 \in V$. Eine Funktion $u \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ heißt *schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung*, falls

(i) $$\int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial t} v dxdt + \int\limits_Q \nabla u \cdot \nabla v dxdt = \int\limits_Q f v dxdt \quad \forall\, v \in \widetilde{V}.$$

(ii) $u|_{t=0} \ = \ u_0$ im Spursinne.

Bemerkung 5.42 1. Eine Funktion $u \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ ist schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung, genau dann wenn für fast alle $t \in (0,T)$:

$$\int\limits_0^t -(u(s), v_t(s)) + ((u(s), v(s)))ds$$
$$= \int\limits_0^t (f(s), v(s))ds \ + \ (u_0, v(0)) - (u(t), v(t)) \quad \forall\, v \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}.$$

2. Außerdem gilt die Identität

$$E(t) \ = \ E(0) \ + \int\limits_0^t (f(s), u(s))ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

wobei $E(t) \ = \ \frac{1}{2}|u(t)|^2 \ + \ \int\limits_0^t |\nabla u(s)|^2 ds$.

Satz 5.43 *Sei u schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int\limits_0^t \left|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right|^2 ds \ = \ \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int\limits_0^t \Big(f_h(s), \frac{\partial u}{\partial t}(s)\Big) ds \quad \textit{f.f.a. } t \in (0,T)$$

Beweis Sei $t \in (0,T)$. Wir nehmen an, dass $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathscr{V}$ und $u \in C^0([0,T];V)$. Wir multiplizieren beide Seiten der Wärmeleitungsgleichung mit $\frac{\partial u}{\partial t}(s)$ und integrieren das Ergebnis über $\Omega \times (0,t)$. Dies liefert

$$\int_0^t \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \frac{\partial \nabla u}{\partial t}(x,s) dxds = \int_0^t \int_\Omega f(x,s) \frac{\partial u}{\partial t}(x,s) dxds.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^t \Big|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\Big| ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u(s)\|^2 ds = \int_0^t \Big(f(s), \frac{\partial u}{\partial t}(s)\Big) ds.$$

Hieraus ergibt sich, dass $\|u(\cdot)\|^2 \in W^{1,2}(0,T) \hookrightarrow C^0([0,T])$. Hieraus folgt die geforderte Identität für alle $t \in (0,T)$.

Im allgemeinen Fall ersetze man u durch das Steklov-Mittel

$$u_h(x,t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x,s) ds, \quad (x,t) \in (0, T-h), \quad 0 < h < T.$$

Dann ist $u_\lambda \in C^0([0,T];V)$ und genügt der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} - \Delta u_h = f_h \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T-h).$$

Man wähle $t \in (0,T)$, so dass $u_\lambda(t) \to u(t)$ in V für $h \to 0$. Die Menge aller $t \in (0,T)$ für welche dies nicht gilt ist eine Menge vom Maß 0. Wir haben somit

$$\frac{1}{2}\|u_h(t)\|^2 + \int_0^t \Big|\frac{\partial u_h}{\partial t}(s)\Big|^2 ds \; = \; \frac{1}{2}\|u_h(0)\|^2 + \int_0^t \Big(f_h(s), \frac{\partial u_h}{\partial t}(s)\Big) ds.$$

Insbesondere ist $(u_h(0))$ in V beschränkt. Beachtet man $u_h(0) \to u_0$ in H für $h \to 0$ (aufgrund der Spureigenschaft), so folgt aus Lemma 5.33, dass

$$u_h(0) \rightharpoonup u_0 \quad \text{in} \quad V \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges $h \to 0$ auf beiden Seiten der obigen Identität ergibt sich die Behauptung. ■

Unter Verwendung von Satz 5.39 beweist man

Satz 5.43 *Sei $f \in \mathscr{H}$ und $u_0 \in V$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ der Wärmeleitungsgleichung.*

Beweis Sei $0 < T < +\infty$. Seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_m \le \ldots$ die Eigenwerte von $-\Delta$ und $\{v_k\}$ ein vollständiges ONS im Hilbertraum $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ von Eigenvektoren gemäß Satz 5.39. Dann ist $\{\sqrt{\lambda_k} v_k\}$ ein vollständiges ONS im Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$. Wegen $u_0 \in H$ haben wir die Fourierreihe

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u_0, \varphi_k)\varphi_k \quad \text{in} \quad H.$$

Wir nehmen zunächst an, dass $f \in C^0(0,T;H)$. Dann bekommt man

$$f(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f(\cdot,t), \varphi_k)\varphi_k \quad \text{in} \quad H \quad \forall\, t \in (0,T).$$

Wir setzen $b_k(t) := \lambda_k(f(\cdot,t),\varphi_k)$ und $a_{0,k} = \lambda_k(u_0,\varphi_k)$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$a_k' + \lambda_k a_k = b_k \quad \text{in} \quad [0,T], \quad a_k(0) = a_{0,k}.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$a_k(t) = a_{0,k} e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t b_k(s) e^{-\lambda_k (t-s)} ds, \quad t \in [0,T].$$

Wir setzen $v_k(x,t) = a_k(t)\varphi_k(x)$. Dann löst $v_k \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} - \Delta v_k = b_k \varphi_k \quad \text{in} \quad Q, \quad v_k(0) = a_{0,k}\varphi_k.$$

Wir definieren nun die Projektionen

$$\begin{aligned} u_m(x,t) &= \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\varphi_k(x), \quad f_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\varphi_k(x), \\ u_{0,m}(x) &= \sum_{k=1}^{m} a_{0,k}\varphi_k(x). \end{aligned}$$

Dann ist $u_m \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - \Delta u_m = f_m \quad \text{in} \quad Q, \quad u_m(0) = u_{0,m}, \quad (x,t) \in Q.$$

Diese Lösung heißt auch **Galerkin-Näherung** (Approximation).

Grenzübergang $m \to +\infty$: Zunächst wissen wir, dass aus der Theorie der Fourierreihen folgt

$$f_m(\cdot,t) \to f(\cdot,t) \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad m \to \infty \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Außerdem haben wir

$$|f_m(t)| \le |f(t)| \le \max_{[0,T]} |f(\cdot)| \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Mithilfe des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz folgt

$$f_m \to f \quad \text{in} \quad \mathscr{H} \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Außerdem haben wir

$$u_{0,m} \to u_0 \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad m \to \infty.$$

Seien $m, l \in \mathbb{N}$, setzen $v = u_m - u_l \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$. Die Funktion v genügt der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = f_m - f_l, \quad v(0) = u_{0,m} - u_{0,l}.$$

Aus Bem. 5.42/2. und Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sowie der Youngschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \|u_m - u_l\|^2 &\leq \frac{1}{2}|u_{0,m} - u_{0,l}|^2 + \int_0^T (f(t), u_m(t) - u_l(t))dt \\ &\leq \frac{1}{2}|u_{0,m} - u_{0,l}|^2 + \frac{1}{2}\|u_m - u_l\|^2 + \frac{1}{2}|f_m - f_l|^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass (u_m) eine Cauchy-Folge im Hilbertraum $\mathscr{V}$ ist, was zeigt dass

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad \mathscr{V} \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Ferner haben wir aufgrund von Satz 5.43 die Identität

$$\int_0^T |u_{m,t}(t) - u_{l,t}(t)|^2 ds = \frac{1}{2}\|u_{0,m} - u_{0,l}\|^2 + \int_0^T (f(t), u_{m,t}(t) - u_{l,t}(t))dt.$$

Dies zeigt, dass $\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)$ eine Cauchy-Folge im Hilbertraum $\mathscr{H}$ ist, was zeigt dass

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{in} \quad \mathscr{H} \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Somit ist $u \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$. Nach Ausführung des Grenzübergangs in der Identität folgt, dass u schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Diese Lösung ist aufgrund von Bem 5.42/2. eindeutig.

Für den allgemeinen Fall $f \in \mathscr{H}$ betrachte man die Wärmeleitungsgleichung mit der regularisierten rechten Seite f_h, wobei f_h das Steklov-Mittel bezeichne. Nach dem obigen Fall existiert genau eine schwache Lösung $u_h \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ der Wärmeleitungsgleichung. Wegen $f_h \to f$ in $\mathscr{H}$ für $h \to 0$ kann man genauso wie wie oben argumentieren, um zu zeigen, dass

$$u_h \to u \quad \text{in} \quad W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V} \quad \text{für} \quad h \to 0,$$

so, dass $u \in W^{1,2}(Q) \cap \mathscr{V}$ die gesuchte schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. ■