PD Dr. J. Wolf
**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 19. April 2016

# Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
# Übungsblatt 0

(Besprechung in der Übung am 22. April 2016)

**Aufgabe 1** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $C^0_B(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen und auf $\Omega$ beschränkten Funktionen. Wir definieren

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad f \in C_B(\Omega).$$

(a) Zeigen Sie, $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_{C^0_B})$ ist ein Banachraum.

(b) Ein $n$-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ heißt *Multiindex*. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $p \in \mathbb{N}$. Für $f \in C^p(\Omega)$ setzen wir

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n}}(x), \quad x \in \Omega.$$

Mit $C^p_B(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $f \in C^0_B(\Omega)$ mit $D^\alpha f \in C^0_B(\Omega)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ mit $|\alpha| \le p$ (Hier: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$). Wir definieren

$$\|f\|_{C^p_B} = \sup_{|\alpha|\le p} \|D^\alpha f\|_{C^0_B}, \quad f \in C^p_B(\Omega).$$

Zeigen Sie, $(C^p(\Omega), \|\cdot\|_{C^p_B})$ ist ein Banchraum.

(c) Sei $\Omega$ beschränkt. Wir definieren

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| dx, \quad f \in C^0_B(\Omega).$$

Ist $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ? (Begründung !).

**Aufgabe 2** Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt präkompakt, falls für all $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_m\} \subset M$ existiert, so dass

$$\bigcup_{i=1}^m K(x_i, \varepsilon) \supset M.$$

Hierbei bezeichne $K(x, \varepsilon)$ die offene Kugel $\{y \in X \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$. Die Menge $\{x_1, \dots, x_m\}$ heißt auch *endliches $\varepsilon$-Netz*.

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $X \subset Y$. Wir sagen $X$ ist in $Y$ *kompakt eingebettet*, falls $\{x \in X \mid \|x\|_X \le 1\}$ in $Y$ präkompakt ist.

Sei $\Omega$ beschränkt und konvex. Zeigen Sie, dass $C^1_B(\Omega)$ kompakt in $C^0_B(\Omega)$ eingebettet ist.

## Lösungen Blatt 0

**Aufgabe 1** (a) Sei $\{f_k\}$ eine Cauchyfolge in $C_B(\Omega)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Folge $\{f_k(x)\}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $R$ vollständig ist existiert ein eindeutiger Grenzwert $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Gemäß Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\|f_k - f_m\|_{C_B^0} \leq \varepsilon$ für all $m, k \geq N$. Hiermit erhält man für alle $k \geq N$ und $x \in \Omega$

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_k(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Folglich konvergiert $f_k$ gleichmäßig gegen $f$. Insbesondere ist $f$ stetig. Außerdem existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_k(x)| \leq 1$. Mithilfe der Dreiecksungleichung findet man

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq 1 + \|f_k\|_{C_B^0}.$$

Also ist $f \in C_B^0(\Omega)$ und $f_k \to f$ in $C_B^0(\Omega)$ für $k \to +\infty$.

(b) Sei $\{f_k\}$ eine Cauchyfolge in $C_B^p(\Omega)$. Dann is für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq p$ die Folge $\{D^\alpha f_k\}$ eine Cachyfolge in $C_B(\Omega)$. Gemäß (a) existiert genau ein $g^\alpha \in C_B(\Omega)$ so dass $D^\alpha f_k \to g^\alpha$ in $C_B(\Omega)$ für $k \to +\infty$.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen der Cauchyfolgeneigenschaft gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\partial_i f_k - \partial f_l\|_{C_B} \leq \frac{\varepsilon}{6}$ für alle $k, l \geq N$. Wegen der Stetigkeit von $\partial_i f$ existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, so dass $|\partial_i f_N(x) - \partial_i f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{6}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - y| \leq \delta$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung findet man für all $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$ und all $k \geq N$

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{f_k(x+he_i) - f_k(x)}{h} - \partial_i f_k(x)\Big| \\
&\quad = \Big|\int_0^1 \partial_i f_k(x+the_i)dt - \partial_i f_k(x)\Big| \\
&\quad \leq \Big|\int_0^1 \partial_i f_k(x+the_i) - \partial_i f_N(x+the_i)dt\Big| \\
&\qquad\qquad + |\partial_i f_k(x) + \partial_i f_N(x)| + \Big|\int_0^1 \partial_i f_N(x+the_i) - \partial_i f_N(x)dt\Big| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$. Wir wählen $k \geq N$, so dass

$$\Big|\frac{f_k(x+he_i) - f_k(x)}{h} - \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|g^i(x) - \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}\Big| \\
&= \Big|g^i(x) - \partial_i f_k(x) + \partial_i f_k(x) - \frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h} \\
&\qquad + \frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h} - \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}\Big| \\
&\le \|g^i - \partial_i f_k\|_{C_B} + \Big|\partial_i f_k(x) - \frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h}\Big| \\
&\qquad + \Big|\frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h} - \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}\Big| \\
&\le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus schließt man, dass $g^i = \partial_i f$. Induktiv zeigt man $g^\alpha = D^\alpha f$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \le p$. Somit haben wir $f \in C^p_B(\Omega)$ und $f_k$.

(c) Der Raum $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ist kein Banachraum.

**Begründung**: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Wir annehmen, dass $0 \in \Omega$, und $B_2 \subset \Omega$. Wir definieren $f_k \in C^0_B(\Omega)$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |x| \le 1 \\ 1 - k(|x|-1) & \text{falls} \quad 1 < |x| < 1 + \frac{1}{k} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \Omega \setminus \overline{B_{1+1/k}(0)} \end{cases}$$

Offensichtlich is $\{f_k\}$ monoton abnehmend, und für $k < l$ erhält man

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int\limits_{B_{1+1/k}\setminus B_1} |f_k - f_l| dx \le 2\,\mathrm{meas}(B_{1+1/k} \setminus B_1) \le 2\Big[\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^n - 1\Big]\,\mathrm{meas}(B_1).$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $k \to +\infty$. Dies zeigt, dass $\{f_k\}$ eine Cauchyfolge in $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ist. Angenommen, es gibt ein $f \varepsilon C^0_B(\Omega)$, so dass

$$\int\limits_\Omega |f - f_k| dx \to 0 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dann folgt $\int\limits_{\Omega\setminus B_r} |f| dx = 0$ für alle $r > 1$. Folglich $f \equiv 0$ auf $\Omega \setminus B_1$. Auf der anderen Seite folgt aus der obigen Konvergenzeigenschaft dass $\int\limits_{B_1} |f - 1| = 1$.. Somit ist $f \equiv 1$ auf $B_1$. Dies bedeutet aber, dass $f$ nicht stetig ist. Somit ist die Annahme falsch, und der Raum kein Banachraum.

**Aufgabe 2** Sei $M = \{f \in C^1_B(\Omega) \,|\, \|f\|_{C^1_B} \le 1\}$. Für ein beliebiges $f \in M$ erhält man unter Verwendung des Hauptsatzes der Diff. und Integralrechnung

$$|f(x) - f(y)| = \Big|\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i f_k(y + (x-y)t)(x_i - y_i) dt\Big| \le n|x - y|$$

Für $\varepsilon > 0$ seien $\{x_1^\varepsilon, \dots, x_{N_\varepsilon}^\varepsilon\}$, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B(x_j^\varepsilon, \varepsilon/3n) \supset \Omega$$

Wir betrachten die Menge $\left\{(f(x_1^\varepsilon), \dots, f(x_{N_\varepsilon}^\varepsilon)) \,\middle|\, f \in M\right\}$. Diese Menge ist in $\mathbb{R}^{N_\varepsilon}$ beschränkt und somit präkompakt. Folglich existiert eine endliche Menge $\{f_1, \dots, f_m\}$ so dass für alle $f \in M$ ein $1 \leq j \leq m$ existiert mit

$$|f(x_i^\varepsilon) - f_j(x_i^\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, i = 1, \dots, N_\varepsilon. \tag{1}$$

Sei $f \in M$ beliebig gewählt. Sei $1 \leq j \leq m$ so dass (1) erfüllt ist. Sei $x \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq N_\varepsilon$, so dass $|x - x_i| \leq \varepsilon$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung bekommt man

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_j(x)| &= |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f_j(x_i) + f_j(x_i) - f_j(x)| \\
&\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist $\{f_1, \dots, f_m\}$ ein endliches $\varepsilon$-Netz für $M$.