PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 01. Juli 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 10

(Besprechung in der Übung am 08. Juli 2016)

Aufgabe 1 Sei X ein Banachraum und $F : X \to X'$ Gâteaux-differenzierbar.
Zeigen Sie: F ist genau dann monoton, wenn

$$\langle d_G F(x_1)x_2, x_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Aufgabe 2 Sei X ein Banachraum. Wir nehmen an, für jedes $x \in X$ existiert genau ein $x^* = J(x) \in X'$, so dass $\|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 = \langle x^*, x\rangle$. Die Abbildung $J : X \to X'$ heißt Dualitätsabbildung.

(a) Zeigen Sie: J ist monoton, koerziv, demistetig und bijektiv.

(b) Wir nehmen an die Abbidung $F : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ ist Gâteaux-differenziebar in $x \in X$ mit $d_G(x) \in X'$. Zeigen Sie, dass dann $J(x) = d_G(x)$.

(c) Bestimmen Sie J für $X = L^p(\Omega)\,(1 < p < +\infty)$.

Aufgabe 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $1 < p < \infty$. Ferner sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ beschränkt. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int\limits_\Omega f(u) v dx = 0 \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bemerkung: Die Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Aufgabe 4 Sei $A : X \to X'$ pseudomonoton und beschränkt sowie $B : X \to X'$ kompakt und schwach $*$-stetig, das heißt

$$x_k \rightharpoonup x \;\; in \;\; X \quad für \;\; k \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad B(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} B(x) \;\; in \quad X' \quad für \;\; k \to +\infty.$$

Zeigen Sie: Ist ferner $A + B$ koerziv, so ist $A + B$ surjektiv .