PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 29. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 2

(Besprechung in der Übung am 6. Mai 2016)

Aufgabe 1
Seien $X_1, \dots, X_n, Y$ normierte Vektorräume und $M : X_1 \times \dots X_n \to Y$ eine multilineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) M ist stetig.

(b) Es existiert eine Konstante $C \geq 0$, so dass

$$\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \quad \forall\, (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n.$$

Aufgabe 2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $2 \leq p < +\infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega)$. Man betrachte das Funktional $F : X = L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(v) = \int_\Omega |v|^p dx + \int_\Omega fv dx, \quad v \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass $F \in C^2(X)$ und berechnen Sie die Fréchet-Ableitungen $DF(u), D^2F(u)$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung von F in $u \in X$.

(c) Untersuchen Sie F auf lokale und globale Extremwerte.

Aufgabe 3 (Satz von Schwarz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in C^1(U)$ und sei Df in $x_0 \in U$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$