PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 29. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 2

(Besprechung in der Übung am 6. Mai 2016)

Aufgabe 1
Seien $X_1, \ldots, X_n, Y$ normierte Vektorräume und $M : X_1 \times \ldots X_n \to Y$ eine multilineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) M ist stetig.

(b) Es existiert eine Konstante $C \geq 0$, so dass

$$\|M(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Aufgabe 2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $2 \leq p < +\infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega)$. Man betrachte das Funktional $F : X = L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(v) = \int\limits_\Omega |v|^p dx + \int\limits_\Omega f v dx, \quad v \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass $F \in C^2(X)$ und berechnen Sie die Fréchet-Ableitungen $DF(u), D^2F(u)$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung von F in $u \in X$.

(c) Untersuchen Sie F auf lokale und globale Extremwerte.

Aufgabe 3 (Satz von Schwarz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in C^1(U)$ und sei Df in $x_0 \in U$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Lösungen Blatt 2

Aufgabe 1: $\Rightarrow$ Da M stetig in $(0,\ldots,0)$ existiert ein $\delta>0$, so dass

$$\|M(x_1,\ldots,x_n)\| \;\le\; 1 \quad \forall\,(x_1,\ldots,x_n)\in X_1\times\ldots\times X_n, \quad \|(x_1,\ldots,x_n)\|\le\delta.$$

Sei $(x_1,\ldots,x_n)\in X_1\times\ldots\times X_n$ mit $M(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$. Dann $x_i\neq 0$ für alle $i=1,\ldots,n$. wir setzen $x_i'=\delta\frac{x_i}{\|x_i\|}$ $(i=1,\ldots,n)$. Dann haben wir $\|(x_1',\ldots,x_n')\|=\delta$, also

$$\|M(x_1',\ldots,x_n')\| \;=\; \delta^n\frac{M(x_1,\ldots,x_n)}{\|x_1\|\cdots\|x_n\|} \;\le\; 1.$$

Folglich gilt die Behauptung für $c=\delta^{-n}$.

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} M(x_1,\ldots,x_n)-M(x_1',\ldots,x_n') \;&=\; M(x_1-x_1',\ldots,x_n)+M(x_1',x_2\ldots,x_n)-M(x_1',\ldots,x_n')\\ &=\; M(x_1-x_1',\ldots,x_n)+M(x_1',x_2-x_2',\ldots,x_n)\\ &\;+\;\ldots+M(x_1',\ldots x_{n-1}',x_n-x_n'). \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} &\|M(x_1,\ldots,x_n)-M(x_1',\ldots,x_n')\|\\ &\le\; \|x_1-x_1'\|(\|x_2\|\cdots\|x_n\|)+\|x_2-x_2'\|(\|x_1'\|\|x_3\|\cdots\|x_n\|)\\ &\qquad+\ldots+\|x_n-x_n'\|\|x_1'\|\cdots\|x_{n-1}'\| \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir berechnen

$$DF(u)h \;=\; p\int_\Omega |u|^{p-2}uh\,dx+\int_\Omega fh\,dx, \quad u,h\in X.$$

Wir bekommen

$$|DF(u)h-DF(v)h| \;=\; p\int_\Omega \Big||u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\Big||h|\,dx$$

$$|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v \;=\; (p-1)\int_0^1 |v+t(u-v)|^{p-2}(u-v)\,dt$$

Hiemit ergibt sich

$$\Big||u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\Big|^{p'} \;\le\; (p-1)^{p'}\int_0^1 |v+t(u-v)|^{p'(p-2)}dt\,|u-v|^{p'}$$

Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung wegen $\frac{p}{p-p'}p'(p-2) = p$ folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \Big||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\Big|^{p'} dx \;&\le\; (p-1)^{p'} \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 |v+t(u-v)|^{p'(p-2)} dt |u-v|^{p'} dx \\
&\le\; (p-1)^{p'} \Bigg(\int\limits_\Omega \int\limits_0^1 |v+t(u-v)|^p dt dx \Bigg)^{1-p'/p} \times \\
&\qquad \times \Bigg(\int\limits_\Omega |u-v|^p dx \Bigg)^{p'/p} \\
&\le\; 2^{p-2}(p-1)^{p'}(\|u\|_p + \|v\|_p)^{p-p'}\|u-v\|_p^{p'}
\end{aligned}$$

Für fixiertes $k \in X$ ist $g = DF(u)k$ differenzierbar mit

$$Dg(u)h \;=\; p(p-1) \int\limits_\Omega |u|^{p-2} hk dx = D^2F(u)(h,k) \quad \forall\, h \in X.$$

Aus der obigen Rechnung folgt

$$\begin{aligned}
&DF(u+h)k - Df(u)k - D^2F(u)(h,k) \\
&= p \int\limits_\Omega \Big(|u+h|^{p-2}(u+h) - |u|^{p-2}u \Big) k dx - p(p-1) \int\limits_\Omega |u|^{p-2} hk dx \\
&= p(p-1) \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 |u+th|^{p-2} hk dx - p(p-1) \int\limits_\Omega |u|^{p-2} hk dx
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung findet man

$$\begin{aligned}
&|DF(u+h)k - Df(u)k - D^2F(u)(h,k)| \\
&\quad\le\; p(p-1) \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 (|u+th|^{p-2} - |u|^{p-2}) dt |h||k| dx \\
&\quad\le\; p(p-1) \int\limits_\Omega |h|^{p-1}|k| dx \;\le\; p(p-1)\|k\|\|h\|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Folglich haben wir

$$\|DF(u+h) - Df(u) - D^2F(u)(h,\cdot)\| \;\le\; p(p-1)\|h\|^{p-1} = o(h).$$

(b) Die Taylor-Entwicklung lautet

$$\begin{aligned}
F(u+h) \;&=\; F(u) + DF(u)h \;+\; \int\limits_0^1 (1-t) D^2F(u+th)(h,h) dt \\
&=\; \int\limits_\Omega |u|^q + p|u|^{p-2}uh + fh dx \;+\; p(p-1) \int\limits_0^1 (1-t) \int\limits_\Omega |u+th|^{p-2} h^2 dx dt.
\end{aligned}$$

(c) Hat F in u ein lokales Extemum, so gilt $DF(u) = 0$, also

$$p|u|^{p-2}u + f = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Hieraus folgt $p|u|^{p-1} = |f|$, also $|u|^{p-2} = \left(\frac{|f|}{p}\right)^{(p-2)/(p-1)}$. Dies liefert

$$u(x) = -\operatorname{sign}(f(x))\Big(\frac{|f(x)|}{p}\Big)^{\frac{1}{p-1}}, \quad x \in \Omega.$$

Für die zweite Ableitung folgt

$$D^2 f(u)(h,h) \;=\; p(p-1)\int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}h^2 dx$$

Aus der Taylorformel folgt

$$F(u+h) = F(u) \;+\; p(p-1)\int\limits_0^1 (1-t)\int\limits_{\Omega} |u+th|^{p-2}h^2 dx dt \geq F(u) \quad \forall\, h \in X.$$

Folglich hat F in u ein globales Minimum.

Aufgabe 3: Sei $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f : C^1(U)$ und Df in $(0,0)$ total differenzierbar. Mithilfe der Newton-Leibnitz Formel bekommt man für $0 < t < R$

$$\begin{aligned}
&f(te_1 + te_2) - f(te_2) - f(te_1) + f(0,0) \\
&\quad = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau te_1 + te_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau te_1) d\tau\, t \\
&\quad = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t(\tau e_1 + te_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau te_1) d\tau\, t \\
&\quad = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t(\tau e_1 + te_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) - D\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)(t(\tau e_1 + te_2)) d\tau\, t \\
&\qquad - \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau te_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) - D\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)(t\tau e_1) d\tau\, t \;+\; t^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0). \\
&\quad = o(t)t \;+\; t^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned}
&f(te_1 + te_2) - f(te_2) - f(te_1) + f(0,0) \\
&\quad = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(te_1 + \tau te_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tau te_2) d\tau t \\
&\quad = o(t)t \;+\; t^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0).
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$.