PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 06. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 3

(Besprechung in der Übung am 13. Mai 2016)

Aufgabe 1
Sei $X = W_0^{1,2}((0,2))$. Wir definieren das Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) = \int_0^2 (u'(t))^2 dt + \int_0^2 u(t) dt, \quad u \in X.$$

(a) Zeigen Sie, das $F \in C^\infty(X)$ und bestimmen Sie $D^k F$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Untersuchen Sie F auf lokale und globale Extrema und bestimmen Sie diese gegebenfalls.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathscr{L}(X,X)$ mit $\|T\| < 1$ gilt: $I + T \in ISO(X,X)$, so dass

$$(I+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^k.$$

Schließen Sie hieraus, dass $ISO(X,X)$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,X)$ ist.

Aufgabe 3
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 17 \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein $\delta > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\Phi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$F(t,\Phi(t)) = 0 \quad \forall\, t \in (-\delta,\delta), \quad \Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_2(0) = 2.$$

Ferner berechne man die Ableitung $\Phi' : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass F keine isolierte Nullstelle besitzt.

Lösungen Blatt 3

Aufgabe 2: Sei $T \in \mathscr{L}(X,X)$ mit $\|T\| < 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Induktiv zeigt man $\|T^k\| \leq \|T\|^k$. Denn für alle $x \in X$ gilt:

$$\|T^k x\| = \|T(T^{k-1}x)\| \leq \|T\| \|T\|^{k-1} \|x\| = \|T\|^k \|x\|$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung findet man

$$\Big\| \Big(\sum_{k=m}^{n} (-1)^k T^k \Big) x \Big\| \leq \sum_{k=m}^{m} \|T\|^k \|x\|.$$

Da $\|T\| < 1$ ist die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge in $\mathscr{L}(X,X)$ also konvergiert diese gegen ein $S \in \mathscr{L}(X,X)$. Außerden erhält man

$$\begin{aligned} (I+T)S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ((-1)^k T^k + (-1)^k T^{k+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k T^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k T^{k+1} + I = I. \end{aligned}$$

Nun sei $T \in ISO(X,X)$. Sei $S \in \mathscr{L}(X,X)$ mit $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $\|T^{-1}S\| < 1$. Aus (a) folgt $I + T^{-1}S \in ISO(X,X)$, also auch $T + S = T(I + T^{-1}S) \in ISO(X,X)$. Folglich ist $B_{\|T^{-1}\|^{-1}}(T) \subset ISO(X,X)$, was die Behauptung beweist.

Aufgabe 3: Wir berechnen

$$D_{(x_2,x_3)} F(0,1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 32 \end{pmatrix} \in ISO(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Existenz einer Abbidung $\Phi(-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$F(t, \Phi(t)) = F(0,1,2) = 0 \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta).$$

Nun sei $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,3}, x_{0,3}) \in \mathbb{R}^3$, so dass $F(x_0) = 0$. Dann kann höchstens eine Koordinate 0 sein. Wegen der Symmetrie können wir OBdA annehmen, dass $x_{0,2} \neq 0, x_{0,3} \neq 0$. Wir nehmen an, dass

$$D_{(x_2,x_3)} F(0,1,2) = \begin{pmatrix} 2x_{0,2} & 2x_{0,3} \\ 4x_{0,2}^3 & 4x_{0,3}^3 \end{pmatrix} \notin ISO(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

Wegen $x_{0,2} \neq 0$ und $x_{0,3} \neq 0$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass

$$x_{0,3} = \lambda x_{0,2}, \quad \lambda^3 x_{0,2}^3 = x_{0,3}^3 = \lambda x_{0,2}^3.$$

Dies impliziert $\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm 1$ und

$$x_{0,3} = \pm x_{0,2}.$$

Wäre $x_1 = 0$, so hätte man $2x_{2,0}^2 = 5$ und $2x_{0,2}^4 = 2 \cdot 25 = 50 \neq 17$ ein Widerspruch. Folglich gilt $x_{1,0} \neq 0$.
Wir nehmen nun weiterhin an, dass

$$D_{(x_1,x_2)}F(0,1,2) = \begin{pmatrix} 2x_{0,1} & 2x_{0,2} \\ 4x_{0,1}^3 & 4x_{0,2}^3 \end{pmatrix} \notin ISO(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

Wie oben zeigt man

$$x_{0,2} = \pm x_{0,1}$$

Folglich $x_{0,1}^2 = x_{0,2}^2 = x_{0,3}^2$. Dies liefert $F(x_0) = (3x_{1,0}^2 - 5, 3x_{1,0}^4 - 17) = (0,0)$. Also $x_{1,0}^2 = \frac{5}{3}$ folglich $x_{1,0}^4 = \frac{25}{9}$ im Widerspruch zu $x_{1,0}^4 = \frac{17}{3}$. Somit ist die Annahme falsch. Nach dem Satz über impliziete Funktionen ist x_0 keine isolierte Nullstelle.