

PD Dr. J. Wolf

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

www2.mathematik.hu-berlin.de/~jwolf

E-Mail: jwolf@math.hu-berlin.de

20. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016

Übungsblatt 5

(Besprechung in der Übung am 27. Mai 2016)

Aufgabe 1

- (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, es existiert eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$g|_K = f, \quad \text{supp}(g) \text{ ist kompakt.}$$

- (b) Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, so dass

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

- (a) Sei $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ stetig und es gelte $f(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann $f(\overline{B_1(0)}) = \overline{B_1(0)}$ ist.
- (b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset B$. A heißt ein *Retrakt* von B , falls es eine stetige Abbildung $f : B \rightarrow A$ gibt, so dass $f(x) = x$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass $\partial B_1(0)$ kein Retrakt von $\overline{B_1(0)}$ ist.

Hinweis zu (a): Man betrachte für $y \in B_1(0)$ die Homotopie $H(x, t) := (1-t)x + tf(x) - y$.

Aufgabe 3

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge, für die der Gaußsche Integralsatz anwendbar ist. Ferner sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, wobei $U \supset \overline{\Omega}$ offen ist und $0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{\lambda^{n-1}(S^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \left(\text{cof}(Df(x))^\top \frac{f(x)}{|f(x)|^n}, \nu(x) \right) dS_x,$$

wobei $\nu : \partial\Omega \rightarrow S^{n-1}$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial\Omega$ ist.

- (b) Sei $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$. Berechnen Sie $\deg(f, B_1(0), 0)$.