PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 20. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 5

(Besprechung in der Übung am 27. Mai 2016)

Aufgabe 1

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Sei $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, es existiert eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$g|_K = f, \quad \text{supp}(g) \text{ ist kompakt.}$$

(b) Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, so dass

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

(a) Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ stetig und es gelte $f(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann $f(\overline{B_1(0)}) = \overline{B_1(0)}$ ist.

(b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n, A \subset B$. A heißt ein *Retrakt* von B, falls es eine stetige Abbildung $f : B \to A$ gibt, so dass $f(x) = x$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass $\partial B_1(0)$ kein Retrakt von $\overline{B_1(0)}$ ist.

Hinweis zu (a): Man betrachte für $y \in B_1(0)$ die Homotopie $H(x,t) := (1-t)x + tf(x) - y$.

Aufgabe 3

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge, für die der Gaußsche Integralsatz anwendbar ist. Ferner sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, wobei $U \supset \overline{\Omega}$ offen ist und $0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\deg(f, \Omega, 0) \;=\; \frac{1}{\lambda^{n-1}(S^{n-1})} \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\text{cof}(Df(x))^\top \frac{f(x)}{|f(x)|^n}, \nu(x) \Big) dS_x,$$

wobei $\nu : \partial\Omega \to S^{n-1}$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial\Omega$ ist.

(b) Sei $f(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$. Berechnen Sie $\deg(f, B_1(0), 0)$.

Lösungen Blatt 5

Aufgabe 2 (a) Nach Voraussetzung genügt es zu zeigen, dass $B_1(0) \subset f(\overline{B_1(0)})$. Sei also $y \in B_1(0)$. Wir definieren

$$H(x,t) = (1-t)x + tf(x) - y, \quad (x,t) \in \overline{B_1(0)} \times [0,1].$$

Angenommen $H(x,t) = 0$ für ein $(x,t) \in \partial B_1(0) \times [0,1]$. Wegen $f(x) = x$ folgt $y = tx + (1-t)x = x$, was aber $y \in B_1(0)$ widerspricht. Folglich ist $0 \notin H(\cdot,t)(\partial B_1(0))$ für alle $t \in [0,1]$. Nach 6.22 und 6.24 haben wir

$$1 = \deg(id - y, B_1(0), 0) \; = \; \deg(f - y, B_1(0), 0).$$

Wegen 6.21 existiert ein $x \in B_1(0)$, so dass $f(x) = y$. Also $y \in f(\overline{B_1(0)})$.

(b) Angenommen es gäbe eine stetige Abbildung $f : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$, so dass $f(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$. Wir betrachten die Homotopie

$$H(x,t) = (1-t)x + tf(x), \quad (x,t) \in \overline{B_1(0)} \times [0,1].$$

Nach Voraussetzung haben wir $H(x,t) = x$ für alle $(x,t) \in \partial B_1(0) \times [0,1]$. Nach 6.22 folgt

$$1 = \deg(id, B_1(0), 0) \; = \; \deg(f, B_1(0), 0).$$

Also hätte f gemäß (d5) eine Nullstelle, was aber aufgrund von $f(\overline{B_1(0)}) \subset \partial B_1(0)$ nicht sein kann. Also ist die Annahme falsch, was die Aussage beweist.

Aufgabe 3: (a) Sei $\omega \in A_\sigma$. Dann

$$deg(f, \Omega, 0) \; = \; \int_\Omega \omega(|f(x)|) \det Df(x) dx.$$

Wie im Beweis von Lemma 6.3 zeigt man

$$\sum_{i,k=1}^n \partial_k(\varphi(|f(x)|) f_i \operatorname{cof}(Df(x))_{ik}) = \omega(|f(x)|) \det(Df(x)),$$

wobei

$$\varphi(r) \; = \; r^{-n} \int_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho) d\rho, \quad r > 0.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes bekommt man

$$\int_\Omega \partial_k(\varphi(|f(x)|) f_i \operatorname{cof}(Df(x))_{ik}) dx \; = \; \int_{\partial\Omega} (\varphi(|f(x)|) f_i \operatorname{cof}(Df(x))_{ik}) \nu_k dS.$$

Sei $r > \sigma$, dann

$$\varphi(r) \; = \; \frac{1}{r^n |\partial B_1|} \int_{B_\sigma(0)} \omega(|y|) dy \; = \; \frac{1}{r^n |\partial B_1|}$$

Wegen $|f(x)| > \sigma$ auf $\partial\Omega$ haben wir

$$\int_\Omega \partial_k(\varphi(|f(x)|) f_i \operatorname{cof}(Df(x))_{ik}) dx \; = \; \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial\Omega} \frac{\operatorname{cof}(Df(x))_{ik}}{|f(x)|^n} f_i(x) \nu_k dS.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. ∎