

PD Dr. J. Wolf

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

www2.mathematik.hu-berlin.de/~jwolf

E-Mail: jwolf@math.hu-berlin.de

27. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016

Übungsblatt 6

(Besprechung in der Übung am 3. Juni 2016)

Aufgabe 1

- (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, das heißt, $V \subset U$ ist offen und relativ abgeschlossen, genau dann wenn $V = U$. Zeigen Sie, dass für alle $x_0, x_1 \in U$ ein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ existiert, so dass $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.
- (b) Sei $Gl_+(n; \mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in Gl(n; \mathbb{R}) \mid \det \mathbf{A} > 0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbf{A} \in Gl_+(n; \mathbb{R})$ ein stetiger Weg $\mathbf{H} : [0, 1] \rightarrow Gl(n; \mathbb{R})$ existiert, so dass $\mathbf{H}(0) = \mathbf{A}$ und $\mathbf{H}(1) = \mathbf{E}_n$. Hierbei bezeichne \mathbf{E}_n die n -dimensionale Einheitsmatrix.

Aufgabe 2 Sei $X = \ell_2 = \left\{ (x_n) \mid \|x\|_{\ell_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ und $B := \{x \in X \mid \|x\|_{\ell_2} \leq 1\}$. Sei $F : B \rightarrow X$ definiert durch

$$F(x) := \left(\sqrt{1 - \|x\|_{\ell_2}^2}, x_1, x_2, \dots \right), \quad x \in B.$$

Zeigen Sie, dass F stetig ist und $F(B) \subset B$ erfüllt ist, aber dass F keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$u(t) = \frac{1}{3} \left(t + u(t)^2 + \int_0^1 \sqrt{|u(s) - s|} ds \right), \quad t \in [0, 1]$$

mindestens eine Lösung $u \in C^0([0, 1])$ mit $0 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, 1]$ besitzt.