Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
PD. Dr. J. Wolf

Übungsaufgaben zur Vertiefung

zur Vorlesung

Einführung in die Theorie der Navier-Stokes Gleichungen

1. Aufgabe Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende$^{*)}$, offene Menge. Man zeige die Existenz einer abzählbaren Familie offener Kugeln $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega,$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B_i \cap B_{m+1} \neq \emptyset \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$

$^{*)}$ Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *nicht zusammenhängend*, falls zwei nichtleere offene Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ existieren mit $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

2. Aufgabe Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichne $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ die Länge von α. Ferner definiere D^α den Differenzialoperator

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_1^{\alpha} x_1 \dots \cdot \partial_n^{\alpha} x_n}$$

der Ordnung $|\alpha|$. Außerdem bezeichne x^α das Monom $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.

Sei $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \varepsilon < +\infty)$ der Friedrichsche Glättungskern mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx = 1, \quad \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon.$$

Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ setzt man

$$f_\varepsilon(x) = f * \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Man zeige:

a) Für alle $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = f * D^\alpha \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) D^\alpha \rho_\varepsilon(y)dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Sei $1 \le p < +\infty$. Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$f_\varepsilon \to f \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

c) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit schwacher Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (i \in \{1, \dots, n\})$. Dann gilt

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)_\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x_i} * \rho_\varepsilon.$$

3. Aufgabe Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$P_\varphi^{(m-1)}(x) = \sum_{|\alpha| \le m-1} (D^\alpha \varphi)_{B_1} x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ein Polynom $(m-1)$-ten Grades. Ferner bezeichne $\widehat{W}^{m\,p}(\mathbb{R}^n)$ den Raum aller $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| = m$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} uP dx = 0 \quad \forall\, P = \sum_{|\alpha| \le m-1} c_\alpha x^\alpha.$$

a) Man zeige, dass $\varphi - T_\varphi^m \in \widehat{W}^{m\,p}(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p < +\infty)$.
b) Wir definieren

$$\widehat{C}^\infty_m(\mathbb{R}^n) = \{\varphi - \varphi_{B_1} \,|\, \varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Man zeige, dass $\widehat{C}^\infty_m(\mathbb{R}^n)$ eine dichte Teilmenge von $\widehat{W}^{m\,p}(\mathbb{R}^n)$ ist.
c) Sei $u \in \widehat{W}^{2,\,p}(\mathbb{R}^n)$. Man zeige, dass die schwachen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad (i = 1, \dots, n)$ existieren und es gilt

$$P_u^1(x) := u_{B_1} + \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)_{B_i} x_i = 0.$$

d) Man zeige, dass $\widehat{W}^{m,\,p}(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p < +\infty)$ ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\widehat{W}^{m,p}} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p}\Big)^{1/p}$$

ein Banachraum ist.

4. Aufgabe Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Man zeige, dass $\mathbb{P}\boldsymbol{f} \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$ mit

$$\mathbb{P}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} = -(\mathbb{P}\boldsymbol{f})^n = 0 \quad \text{fast überall auf} \quad \{x_n = 0\}.$$

5. Aufgabe Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Wir definieren

$$\boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega) = \Big\{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \int\limits_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi dx = 0 \quad \forall\, \phi \in C^1(\overline{\Omega})\Big\}.$$

a) Sei $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \nabla\phi) dx = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^\infty_{c,\mathrm{div}}(\Omega), \forall\, \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Man zeige, dass dann $\boldsymbol{u} = 0$.

b) Man zeige, dass

$$\boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi dx = 0 \quad \forall\, \phi \in W^{1,p'}(\Omega) \right\}.$$

c) Man folgere mithilfe von a), dass $\boldsymbol{C}^\infty_{c,\mathrm{div}}(\Omega)$ ein dichter Teilraum von $\boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ ist.

6. Aufgabe 1. Sei $\Gamma = \frac{1}{\omega_n (n-2)|x|^{n-2}}$ die Fundamentallösung von $-\Delta$. Wir setzen $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \boldsymbol{I}$. Ferner bezeichne $x \otimes x$ die Matrix $\{x_i x_j\}_{i,j=1,\dots,n}$. Für die hydrodynamischen Potentiale haben wir

$$\boldsymbol{\Gamma}^{HD}_{\mathrm{div}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Gamma} - \frac{x \otimes x}{2\omega_n |x|^n}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{HD}_{\mathrm{grad}} = -\frac{1}{2\omega_n (n-2)(n-4)} \nabla^2 |x|^{n-4}.$$

Man zeige:

(a) $\boldsymbol{\Gamma}^{HD}_{\mathrm{div}} + \boldsymbol{\Gamma}^{HD}_{\mathrm{grad}} = \boldsymbol{\Gamma}$;

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma^{HD}_{ij,\mathrm{div}}}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$

2. Seien $f_{ij} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \quad (i,j = 1,\dots,n)$. Sei $g = \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$ und $p = \Delta^{-1} g = -\Gamma * g$, wobei $\Gamma = \frac{1}{\omega_n (n-2)|x|^{n-2}}$. Man beweise die Identität

$$p = \frac{1}{n} \mathrm{tr} \boldsymbol{f} - \sum_{i,j=1}^n T_{K_{ij}} f_{ij}, \quad \text{wobei} \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}.$$