Nichtlineare Operatorgleichungen

Vorlesung WS 2013/2014

0. Einführung

Literatur

1. H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, **Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen**, Akademieverlag Berlin (1974).

2. J.L. Lions, **Quelques méthodes** de résolution des problèmes aux limites non linéares, Dunot, Paris 1969.

3. E. Zeidler, **Nonlinear Functional Analysis and its Applications**, Vol 1-4, Springer.

4. M. Růžička, **Nichtlineare Funktionalanalysis**, Springer (2004).

Nichtlineare Evolutionsgleichung

$$u' + Au = f$$

als abstrakte Beschreibung von parabolischen Differentialgleichungen. Anwendung aus der Physik:

- Strömungsmechanik
- Wärmetransport
- Nichtlineare Diffusion
- Ellastische Deformation

Hierbei $u =$ Geschwindigkeit, Konzentration, Temperatur, Deformationsgeschwindigkeit. A beschreibt Material, Zähigkeit, innere Kräfte. f steht für die äußeren Kräfte.

Beispiel Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $0 < T < +\infty$, $Q_T := \Omega \times]0, T[$.
1. Lineare Gleichung

$$\partial_t u - a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad \text{in} \quad Q_T.$$

2. Quasilineare Gleichung

$$\partial_t u - a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(u) = f \quad \text{in} \quad Q_T.$$

3. Nichtlineare Gleichung

$$\partial_t u - \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x, u, \nabla u)) + b(x, u) = f \quad \text{in} \quad Q_T.$$

1. Fixpunktsätze

1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz 1.1 *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ strikt kontraktiv, d.h. $\exists \delta \in]0, 1[$, so dass*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \delta d(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Beweis Sei $x_0 \in X$. Wir definieren iterativ $x_k = f(x_{k-1})$ $(k \in \mathbb{N})$. Mittels vollständiger Induktion zeigt man

$$d(x_k, x_{k-1}) \leq \delta^k d(x_1, x_0) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Für $k = 1$ ist die Aussage trivial erfüllt. Wir nehmen an, die Aussage gilt für $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k, f(x_{k-1})) \leq \delta d(x_k, x_{k-1}) \overset{IV}{\leq} \delta^{k+1} d(x_1, x_0).$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt für $k \leq l$

$$d(x_k, x_l) \leq \sum_{j=k}^{l-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=k}^{l-1} \delta^j d(x_1, x_0) \leq \delta^k \frac{1}{1-\delta} d(x_1, x_0).$$

Folglich ist (x_k) eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$, so dass

$$x_k \to x \quad \text{in} \quad X \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Aus der Steitigkeit von f folgt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x$. Somit ist die Aussage bewiesen. ■

1.2. Der Brouwersche Fixpunktsatz

Satz 1.2 *Sei $f : [0, 1]^n \to [0, 1]^n$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Wir beweisen den Satz mithilfe des verallgemeinerten Zwischenwertsatz von Miranda.

Satz 1.3 *Sei $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld, so dass*

$$f_i(x) \leq 0 \quad \textit{auf} \quad \{x_i = 0\}, \quad f_i(x) \geq 0 \quad \textit{auf} \quad \{x_i = 1\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann existiert ein $x \in [0, 1]^n$, mit $f(x) = 0$.

A. Vorbereitungen zum Beweis von Satz 1.3

Mit $\mathcal{M}$ bezeichen wir die Menge aller Mengen $B = \{\boldsymbol{b}_0, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \mathbb{Z}^n$. Mit $\boldsymbol{e}_i$ bezeichnen wir den i-ten Einheitsvektor. Wir definieren

$$\boldsymbol{a}_0 = 0, \quad \boldsymbol{a}_i := \sum_{k=1}^{i} \boldsymbol{e}_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $A = \{\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \in \mathcal{M}$.

Mit S_n bezeichnen wir die n-te Permutationsgruppe, welche aus allen bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ besteht. Für $\sigma \in S_n$ sei $E_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die entsprechende Permutation des Raumes $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$E_\sigma = (\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}).$$

Wir berechnen

$$E_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(i)} \boldsymbol{e}_i = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Ferner setzen wir

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wie man leicht sieht, ist $x \mapsto \langle x \rangle$ eine lineares Funktional mit

$$\langle E_\sigma(a_i) \rangle = i \quad \forall\, \sigma \in S_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definition A.1 Sei $B = \{\boldsymbol{b}_0, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \in \mathcal{M}$. Wir sagen $B \sim A$, falls für ein $(z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n$ gilt:

$$(z + E_\sigma)(A) = B.$$

Bezeichnung. Mit $[A]$ bezeichen wir die Menge aller $B \in \mathcal{M}$, so dass $B \sim A$.

Bemerkung A.2 1. $(z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n$ aus Definition A.1 ist eindeutig bestimmt. In der Tat, sei $(z', \sigma') \in \mathbb{Z}^n \times S_n$, so dass $(z' + E_\sigma)(A) = B$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\phi : \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n\}$, so dass

$$z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_i) = z' + E_{\sigma'}(\boldsymbol{a}_{\phi(i)}) \quad \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Nach Anwenden des Funktionals $\langle \cdot \rangle$ auf beiden Seiten folgt

$$\langle z \rangle + i = \langle z' \rangle + \phi(i) \quad \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Hieraus ergibt sich $\langle z \rangle - \langle z' \rangle = \phi(n) - n \le 0$ und $\langle z \rangle - \langle z' \rangle = n - \phi^{-1}(n) \ge 0$. Folglich $\langle z \rangle = \langle z' \rangle$, also $\phi = id$. Aus der obigen Gleichung mit $i = 0$ ergibt sich $z = z'$ und

$E_\sigma(\boldsymbol{a}_i) = E_{\sigma'}(\boldsymbol{a}_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$ ist, folgt $E_\sigma = E_{\sigma'}$ und mithin $\sigma = \sigma'$. Dies bedeutet also

$$[A] = \{z + E_\sigma(A) \,|\, (z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n\} \cong \mathbb{Z}^n \times S_n.$$

2. Sei $B \in \mathcal{M}$. Für $(z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n$ gilt:

$$B \in [A] \quad \Longleftrightarrow \quad z + E_\sigma(B) \in [A].$$

Ferner

$$z + E_\sigma : [A] \to [A].$$

Dies folgt sofort aus $(z + E_\sigma) \circ (z' + E_{\sigma'}) = z + E_\sigma(z') + E_{\sigma\circ\sigma'}$. und $(z + E_\sigma)^{-1} = -E_{\sigma^{-1}} z + E_{\sigma^{-1}}$.

3. Ist $B \sim A$ mit $B = z + E_\sigma(A)$, so besteht B aus Eckpunkten des Einheitswürfels $z + [0, 1]^n$.

Bezeichnung: Ist $B = z + E_\sigma(A) \in [A]$, so schreiben wir $B = \{\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, wobei $\boldsymbol{b}_j = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_j)$ $(j = 0, \ldots, n)$. Es gilt also stets $\boldsymbol{b}_0 = z, \boldsymbol{b}_n = z + \boldsymbol{a}_n$.

Definition A.3 Zwei Elemente $B, C \in [A]$ heißen benachbart, falls $\#B \cap C = n$, bzw. $\#B \setminus C = 1$. Dann gilt $B \setminus C = \{\boldsymbol{b}\}$ und $C \setminus B = \{\boldsymbol{c}\}$. In diesem Fall heißt C Nachbar von B bezüglich $\boldsymbol{b}$ und B Nachbar von C bezüglich $\boldsymbol{c}$.

Zur Existenz und Eindeutigkeit des Nachbarn beweisen wir das folgende

Lemma A.4 *Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sei $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^n, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}_i$. Dann gilt*

$$A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}\} \in [A] \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_i^*,$$

wobei

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^* = \boldsymbol{a}_{i-1} + \boldsymbol{e}_{i+1}, & \textit{falls} \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ \boldsymbol{a}_0^* = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{a}_n^* = -\boldsymbol{e}_n. \end{cases}$$

Beweis Wir zeigen nur die Implikation $\Rightarrow$. Die Umgekerte Richtung folgt durch einfaches Nachrechnen. Gemäß Voraussetzung existiert $(z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n$, so dass $z + E_\sigma(A) = A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}\}$. Insbesondere gibt es eine Bijektion $\phi : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$, so dass

$$(*) \qquad z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_{\phi(j)}) = \boldsymbol{a}_j \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \quad z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_{\phi(i)}) = \boldsymbol{b}.$$

Nach Anwenden des Funktionals $\langle \cdot \rangle$ auf beiden Seiten findet man

$$\langle z \rangle = j - \phi(j) \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}.$$

Dies zeigt, dass nur die Fälle $\langle z \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ möglich sind.

(i) $\langle z \rangle = 0$: Dann folgt sofort $\phi = id$ und wegen $E_\sigma(\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{a}_0$ und $E_\sigma(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{a}_n$ folgt aus $(*)$, dass $z = 0$. Die Beziehung $(*)$ ergibt

$$E_\sigma(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{a}_j \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \quad E_\sigma(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}.$$

Ferner sieht man, dass $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, denn sonst wäre $\sigma = \mathrm{id}$, was aber wegen $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}_i$ falsch ist. Beachtet man $\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_{j-1} = \boldsymbol{e}_j$ und $E_\sigma(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_{\sigma(j)}$ für alle $j = 1, \ldots, n$, so folgt aus der obigen Identität durch Differenzbildung

$$\sigma(j) = j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i+1\}, \quad \sigma(i) = i+1, \sigma(i+1) = i.$$

Hiermit berechnet man

$$\boldsymbol{b} = E_\sigma(\boldsymbol{a}_i) = \sum_{j-1}^{i} E_\sigma(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_{i-1} + \boldsymbol{e}_{\sigma(i)} = \boldsymbol{a}_{i-1} + \boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{a}_i^*.$$

(ii) $\langle z \rangle = 1$: Dann ist $i = 0$. Denn sonst wäre $1 = \langle z \rangle = 0 - \phi(0) \leq 0$ ein Widerspruch. Folglich

$$\phi(j) = j - 1 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \phi(0) = n.$$

Aus $(*)$ mit $j = 1$ ergibt sich $z = z + 0 = \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1$, also

$$\boldsymbol{e}_1 + E_\sigma(\boldsymbol{a}_{j-1}) = \boldsymbol{a}_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \boldsymbol{e}_1 + E_\sigma(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{b}.$$

Wegen $E_\sigma(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{a}_n$ ergibt sich $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_0^*$.

Durch Differenzbildung erhalten wir wie oben

$$\sigma(j) = j + 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1, \sigma(n) = 1.$$

(iii) $\langle z \rangle = -1$: Dann ist $i = n$. Denn sonst wäre $-1 = \langle z \rangle = n - \phi(n) \geq 0$ ein Widerspruch. Folglich

$$\phi(j) = j + 1 \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \phi(n) = 0.$$

Aus $(*)$ mit $j = n-1$ ergibt sich $z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_n) = z + \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_{n-1}$ und somit $z = -\boldsymbol{e}_n$. Dann folgt aus $(*)$

$$-\boldsymbol{e}_n + E_\sigma(\boldsymbol{a}_{j+1}) = \boldsymbol{a}_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1, \quad -\boldsymbol{e}_n + E_\sigma(\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{b}.$$

Also $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n^*$

Durch Differenzbildung ergibt sich

$$\sigma(j) = j - 1 \quad \forall\, j = 2, \ldots, n, \quad \sigma(1) = n.$$

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. ∎

Satz A.5 *Sei $B \in [A]$. Für jedes $\boldsymbol{b} \in B$ existiert genau ein $\boldsymbol{b}^* \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{b}\}$, so dass $B \setminus \{\boldsymbol{b}\} \cup \{\boldsymbol{b}^*\} \in [A]$. Insbesondere hat B genau $n+1$-Nachbarn.*

Beweis Sei $B = z + E_\sigma(A) = \{\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$. Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$. Wir setzen $\boldsymbol{b}_i^* = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_i^*)$ und $B_i^* = B \setminus \{\boldsymbol{b}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}_i^*\}$. Dann ist

$$B_i^* = z + E_\sigma(A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \{\boldsymbol{a}_i^*\}).$$

Nach Lemma A.4 und Bem. A.2/2 ist $B_i^* \in [A]$.

Eindeutigkeit Sei $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$, so dass $B \setminus \{\boldsymbol{b}_i\} \cup \{\boldsymbol{c}\} \in [A]$. Mit $\boldsymbol{b} := (z + E_\sigma)^{-1}(\boldsymbol{c})$ erhält man

$$B \setminus \{\boldsymbol{b}_i\} \cup \{\boldsymbol{c}\} = z + E_\sigma(A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}\}).$$

Dann ist $A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}\} \in [A]$ und gemäß Lemma A.4 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_i^*$. Folglich $\boldsymbol{c} = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_i^*)$. ∎

Bemerkung A.6 Sei $B = \{\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \in [A]$. Seien $(z, \sigma) \in \mathbb{Z}^n \times S_n$, so dass

$$\boldsymbol{b}_j = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_j), \quad \boldsymbol{b}_j^* = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_j^*), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Dann ist $B_i^* = B \setminus \{\boldsymbol{b}_i\} \cup \{\boldsymbol{b}_i^*\}$ der Nachbar von B bezüglich $\boldsymbol{b}_i$. Es gilt

$$\begin{cases} B_i^* \subset z + [0,1]^n & \forall\, i = 1, \ldots, n-1, \\ B_0^* \subset z + \boldsymbol{e}_{\sigma(1)} + [0,1]^n, \\ B_n^* \subset z - \boldsymbol{e}_{\sigma(n)} + [0,1]^n. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$B_i^* = z + E_\sigma(A_i^*), \quad A_i^* = A \setminus \{\boldsymbol{a}_i\} \cup \boldsymbol{a}_i^*, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Einbettung und Reduktion der Dimension

Wir betten $\mathbb{Z}^{n-1}$ in $\mathbb{Z}^n$ gemäß $\mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \{0\}$ kanonisch ein. Ebenso betten wir S_{n-1} in S_n gemäß $S_{n-1} \cong \{\sigma \in S_n | \sigma(n) = n\}$ kanonisch ein. Wir setzen dann

$$A' = \{\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}\}, \quad [A'] = \{z + E_\sigma(A') \,|\, (z, \sigma) \in \mathbb{Z}^{n-1} \times S_{n-1}\}.$$

Dann haben wir

$$[A'] \cong [A]' = \{B \in [A] \,|\, B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\} \in [A']\}.$$

Lemma A.7 *Es gilt*

$$B \in [A]' \iff \#B \cap \mathbb{Z}^{n-1} = n, B \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Beweis ($\Rightarrow$): Ist $B = z + E_\sigma(A) \in [A]'$ so ist $z = \boldsymbol{b}_0 \in \mathbb{Z}^{n-1}$ und $\boldsymbol{b}_n = z + \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{Z}^n_+$.

($\Leftarrow$): Sei $B = z + E_\sigma(A) \in [A]$ mit $\#B \cap \mathbb{Z}^{n-1} = n, B \subset \mathbb{Z}^n_+$. Wir zeigen, dass $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{Z}^{n-1}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$. Sonst wäre $\boldsymbol{b}_n = z + \boldsymbol{a}_n \in Z^{n-1}$, also $z_n = -1$. Dies impliziert $\boldsymbol{b}_0 = z + 0 \notin \mathbb{Z}^n_+$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt die obige Aussage zusammen mit $z \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Nun sei $k \in \{0, \ldots, n\}$, so dass $\sigma(k) = n$. Dann haben wir

$$\boldsymbol{b}_k = z + E_\sigma(\boldsymbol{a}_k) = z + \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{e}_{\sigma(j)} + \boldsymbol{e}_n \notin \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Dies impliziert $k = n$, also $\sigma(n) = n$ und mithin $\sigma \in S_{n-1}$. Dies zeigt, dass $B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\} = \{\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1}\} \in [A']$, also $B \in [A]'$. ■

Definition A.8 Sei $\psi : \mathbb{Z}^n \to \{0, \ldots, n\}$. Sei $B \in [A]$. Ein Nachbar C von B heißt *zulässig*, falls $\psi(B \cap C) = \{0, \ldots, n-1\}$.

Lemma A.9 *Sei $\psi : \mathbb{Z}^n \to \{0, \ldots, n\}$. Sei $B \in [A]$.*

1. Ist $\psi(B) = \{0, \ldots, n-1\}$, dann besitzt B genau zwei verschiedene zulässige Nachbarn C_1, C_2.

2. Ist $\psi(B) = \{0, \ldots, n\}$, dann besitzt B genau einen zulässigen Nachbarn C.

Beweis 1. Nach Voraussetzung $\#\psi^{-1}(\{k\}) \geq 1$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$. Wegen $\cup_{k=1}^n \psi^{-1}(\{k\}) = B$ (disjunkte Vereinigung), haben wir

$$n + 1 = \#B = \# \cup_{k=1}^n \psi^{-1}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \#\psi^{-1}(\{k\}).$$

Folglich existiert genau ein $k_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$, mit $\#\psi^{-1}(\{k_0\}) = 2$, also $\psi^{-1}(\{k_0\}) = \{\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j\} \quad (i \neq j)$. Die Nachbarn B_i^*, B_j^* sind die zulässigen Nachbarn von B.

2. Ist $\psi(B) = \{0, \ldots, n\}$, dann ist ψ bijektiv. Für $\boldsymbol{b}_j = \psi^{-1}(n)$ ist B_j^* der zulässige Nachbar von B. ■

Wir beweisen nun den folgenden zentralen Satz

Satz A.10 *Sei $N \in \mathbb{N}$. Sei $\psi : \mathbb{Z}^n \to \{0, \ldots, n\}$ mit folgender Eigenschaft.*

$$(1) \qquad \begin{cases} \psi(z) \neq i & \forall\, z \in \mathbb{Z}^n \cap [0, N]^n, z_i = 0, \\ \psi(z) \geq i & \forall\, z \in \mathbb{Z}^n \cap [0, N]^n, z_i = N \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Sei $[A]_N$ die Menge aller $B \in [A]$ mit $B \subset [0, N]^n$. Ist $\mathcal{K}$ die Menge aller $B \in [A]_N$ mit $\psi(B) = \{0, \ldots, n\}$, so ist $\#\mathcal{K}$ eine ungerade Zahl.

Beweis Wir beweisen diesen Satz mittels vollständiger Induktion über die Raumdimension $n \in \mathbb{N}$.

(i) Für $n = 1$ bedeutet (1), dass $\psi(0) = 0$ und $\psi(N) = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\psi(2i) = 0$ und $\psi(2i+1) = 1$ für $i = 0, \ldots, m$ mit $N = 2m + 1$. Dann $\mathcal{K} = \Big\{\{0,1\}, \{1,2\}, \ldots, \{N-1, N\}\Big\}$. Folglich $\#\mathcal{K} = N = 2m + 1$.

(ii) Wir nehmen an, die Aussage ist für $n-1$ bewiesen. Sei $\psi' : \mathbb{Z}^{n-1} \to \{0, \ldots, n-1\}$ die Einschränkung von ψ auf $\mathbb{Z}^{n-1}$. Wegen (1) genügt ψ' der Randbedingung

$$(1') \qquad \begin{cases} \psi'(z) \neq i \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}^{n-1} \cap [0,N]^{n-1}, z_i = 0 \\ \psi(z) \geq i \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}^{n-1} \cap [0,N]^{n-1}, z_i = N \\ (i = 1, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Sei $\mathcal{K}'$ die Menge aller $B \in [A]_N$ mit $B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\} \in [A']$ und $\psi'(B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\}) = \{0, \ldots, n-1\}$. Offensichtlich gilt wegen Lemma A.7

$$\mathcal{K}' \cong \Big\{B' \in [A']_N \,|\, \psi'(B') = \{0, \ldots, n-1\}\Big\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung $\#\mathcal{K}' = 2l - 1$.

Zunächst verifizieren wir die folgende nützliche Eigenschaft.

(E) *Besitzt $B \in [A]_N$ einen zulässiger Nachbarn $C \not\subset [0,N]^n$. So ist $B \in \mathcal{K}'$ und $C = B_n^*$.*

In der Tat, nach Voraussetzung liegt $B \cap C$ in einer Randfläche von $[0,N]^n$. Wegen $\psi(B \cap C) = \{0, \ldots, n-1\}$ folgt aus (1), dass $B \cap C \subset \mathbb{Z}^{n-1}$. Da außerdem $B \subset \mathbb{Z}_+^n$ fogert man aus Lemma A.7 $B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\} \in [A']$ und wegen $\psi(B \setminus \{\boldsymbol{b}_n\}) = \{0, \ldots n-1\}$ ergibt sich $B \in \mathcal{K}'$.

Konstruktion maximaler Ketten: Sei $B = \{\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \in [A]_N$, so dass $B \in \mathcal{K}$ oder $B \in \mathcal{K}'$. Wir konstruieren eine maximale Kette $\varphi = \{B_0, \ldots, B_m\}$ durch folgende rekursive Vorschrift:

(i) $B_0 = B$;

(ii) Falls $B \in \mathcal{K}$, so existiert nach Lemma A.9 genau ein zulässiger Nachbar C.

(a) Ist $C \not\subset [0,N]^n$ so folgt nach (E), dass $B \in \mathcal{K}'$. In diesem Fall ist $\gamma = \{B_0\}$ maximal.

(b) Ist $C \subset [0,N]^n$, so setzen wir $B_1 := C$.

(iii) Ist $B \notin \mathcal{K}$, so $B \in \mathcal{K}'$, insbesondere $\psi(B) = \{0, \ldots, n-1\}$. Dann ist $B_n^* \not\subset [0,N]^n$ ein zulässiger Nachbar. Nach Lemma A.9 gibt es einen zweiten zulässigen Nachbarn C. Wegen $C \neq B_n^*$ folgt zusammen mithilfe von (E) $C \subset [0,N]^n$. Dann setzen wir $B_1 = B'$.

(iv) Seien $B_0, \ldots, B_k$ paarweise verschieden bereits bestimmt, so dass B_{j-1} zulässiger Nachbar von $B_j \quad (j = 1, \ldots, k)$ ist.

(a) Falls $B_k \in \mathcal{K}$ oder $B \in \mathcal{K}'$, so ist $\gamma = \{B_0, \dots, B_k\}$ maximal.

(b) Falls weder $B_k \in \mathcal{K}$ noch $B_k \in \mathcal{K}'$, so ist $\psi(B_k) = \{0, \dots, n-1\}$, und B_k hat nach Lemma A.9 genau einen zulässigen Nachbarn $C \neq B_{k-1}$. Da $B_k \notin \mathcal{K}'$ folgt nach (E), dass $C \subset [0, N]^n$. Dann setzen wir $B_{k+1} := C$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $B_{k+1} \neq B_j$ für alle $j = 0, \dots, k-2$. Angenommen $B_{k+1} = B_j$ für ein $j \in \{0, \dots, k-2\}$. Falls $j > 0$, so hätte B_j die drei zulässigen Nachbarn B_{j-1}, B_{j+1}, B_k, was aber nach Lemma A.9/1. nicht sein kann. Also müsste $j = 0$ sein. In diesem Fall hätte $B = B_0$ die zwei zulässigen Nachbarn B_1, B_k. Folglich ist wegen Lemma A.9/2. $B \notin \mathcal{K}$ also $B \in \mathcal{K}'$ und hiermit $B_n^* \not\subset [0, N]^n$ ein weiterer zulässiger Nachbar von B, was aber wegen Lemma A.9/1. nicht möglich ist. Somit ist die Annahme falsch und die Aussage richtig.

Da $[A]_N$ nur endlich viele Elemente enthält, existiert ein $m \geq 0$, so dass $\gamma = \{B_0, \dots, B_m\}$ keine Fortsetzung besitzt und maximal ist. Dann folgt $B_m \in \mathcal{K}$ oder $B_m \in \mathcal{K}'$.

Nach der obigen Konstruktion erhalten wir genau drei disjunkte Klassen von Ketten, K_1 die Menge aller Ketten γ, welche mit $B \in \mathcal{K}'$ beginnen und mit $B_m \in \mathcal{K}$ enden, K_2 die Mengen aller Ketten γ, welche mit $B \in \mathcal{K}'$ beginnen und mit $(B_m) \in \mathcal{K}'$ enden, so dass $B \neq B_m$ und K_3 die Mengen aller Ketten, welche mit $B \in \mathcal{K}$ beginnen und mit $B_m \in \mathcal{K}$ enden, so dass $B \neq B_m$. Wie man leicht sieht ist

$$\#K_1 + \#K_2 = \#\mathcal{K}' = 2l - 1, \quad \#K_1 + \#K_3 = \#\mathcal{K}.$$

Da $\#K_2$ gerade ist, folgt, dass $\#K_1$ ungerade ist. Da $\#K_3$ gerade ist sieht man, dass $\#K_1 + \#K_3 = \#\mathcal{K}$ ungerade ist. ∎

Beweis von Satz 1.3 Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\psi : \mathbb{Z}^n \to \{0, \dots, n\}$ durch

$$\psi(z) = 0 \quad \text{falls} \quad f_i\Big(\frac{z}{N}\Big) + \frac{z_i}{N^2} \leq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n,$$
$$\psi(z) = \max\Big\{i \,\Big|\, f_i\Big(\frac{z}{N}\Big) + \frac{z_i}{N^2} > 0\Big\} \text{ sonst} \quad (z \in \mathbb{Z}^n \cap [0, N]^n).$$

Offensichtlich, genügt ψ der Bedingung (1) aus Satz A.10. Nach Satz A.10 existiert mindestens ein $B^{(N)} = \{\boldsymbol{b}_0^N, \dots, \boldsymbol{b}_n^N\} \in [A]_N$, mit $\psi(B^{(N)}) = \{0, \dots, n\}$. O.B.d.A. sei $\psi(\boldsymbol{b}_i^N) = i$. Wir setzen $x_i^N := \frac{\boldsymbol{b}_i^N}{N}$. Aus der Konstruktion folgt

$$f_i(x_i^N) + \frac{x_i}{N} > 0 \quad f_i(x_0^N) + \frac{x_0}{N} \leq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Da $[0, 1]^n$ kompakt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano/Weierstraß eine Teilfolge $(x_0^{N_k})$ und ein $x \in [0, 1]^n$, so dass $x_0^{N_k} \to x$ in $[0, 1]^n$ für $k \to +\infty$. Wegen $|x_0^N - x_i^N|_\infty \leq \frac{1}{N}$ folgt

$$x_i^{N_k} \to x \quad \text{in} \quad [0, 1]^n \quad \text{für} \quad k \to +\infty \quad (i = 0, \dots, n).$$

Aus der Stetigkeit von f folgt $f_i(x) \leq 0$ und $f_i(x) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, also $f(x) = 0$. ∎

Beweis von Satz 1.2 Wir setzen $g(x) = x - f(x)$. Dann ist $g_i(x) \leq 0$ für $x_i = 0$ und $g_i(x) \geq 0$ für $x_i = 1$. Nach Satz 1.3 existiert ein $x_* \in [0,1]^n$, so dass $g(x_*) = 0$, also $f(x_*) = x_*$. ∎

Folgerung 1.4 *Sei X ein normierter Raum. Sei $K \subset X$ und $f : K \to K$ stetig. Ferner existiere ein $\Phi : K \to [0,1]^n$ bijektiv und stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Beweis Setzen $g := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} : [0,1]^n \to [0,1]^n$. Dann ist g stetig und hat nach Satz 1.2 einen Fixpunkt $y \in [0,1]^n$. Somit gilt

$$f(\Phi^{-1}(y)) = \Phi^{-1}(y).$$

Also ist $x_* = \Phi^{-1}(y)$ Fixpunkt von f. ∎

Satz 1.5 *Sei X endlichdimensionaler normierter Raum. Sei $K \subset X$ abgeschlossen, beschränkt und konvex. Ist $f : K \to K$ stetig, so hat f einen Fixpunkt.*

Beweis O.B.d.A. können wir annehmen, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ und 0 innerer Punkt von K ist, also $B_\rho(0) \subset K$. Wir definieren das Minkowski-Funktional p_K für K durch

$$p_K(x) = \inf \Big\{ t > 0 \,\Big|\, \frac{x}{t} \in K \Big\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann haben wir

$$p_K(tx) = t p_K(x) \quad \forall\, t > 0, \quad p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen $B_\rho(0) \subset K$ folgt

$$p_K(x) = \rho^{-1}|x| p_K\Big(\rho \frac{x}{|x|}\Big) \leq \rho^{-1}|x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Folglich haben wir für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & p_K(x) = p_K(y + x - y) \leq p_K(y) + p_K(x-y) \leq p_K(y) + \rho^{-1}|x-y| \\ & \quad \Longrightarrow \quad |p_K(x) - p_K(y)| \leq \rho^{-1}|x-y|. \end{aligned}$$

Also ist p_K Lipschitzstetig.

Sei $K' \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere konvexe Menge mit $0 \in \operatorname{int}(K')$. Dann setzen wir

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{p_K(x)}{p_{K'}(x)} x & \text{für} \quad x \in K \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\Phi : K \to K'$ bijektiv und stetig mit

$$\Phi^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{p_{K'}(y)}{p_K(y)} y & \text{für} \quad y \in K' \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wendet man das obige Argument für $K' = [-1,1]^n$ an, so folgt die Behauptung mithilfe von Folg. 1.4 und Satz 1.2. ∎

1.3 Der Schaudersche Fixpunktsatz

Sei X ein Banachraum.

Satz 1.6 (**Schauder**) *Sei $M \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei $T : M \to M$ stetig und $T(M)$ in X relativ kompakt ($\overline{T(M)}$ kompakt). Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis $\overline{T(M)}$ kompakt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein endliches ε-Netz $\{y_1^\varepsilon, \dots, y_{m_\varepsilon}^\varepsilon\} \subset T(M)$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i^\varepsilon) \supset \overline{T(M)}.$$

Sei $\{\psi_i^\varepsilon \,|\, i = 1, \dots, m_\varepsilon\}$ eine Zd1, d.h.

(i) ψ_i^ε stetig, $0 \le \psi_i^\varepsilon \le 1$;

(ii) $\operatorname{supp}(\psi_i^\varepsilon) \subset B_\varepsilon(y_i^\varepsilon)$;

(iii) $\sum_{i=1}^{m^\varepsilon} \psi_i^\varepsilon = 1$ auf $\overline{T(M)}$.

Wir setzen $M_\varepsilon = \operatorname{conv}\{y_1^\varepsilon, \dots, y_{m_\varepsilon}^\varepsilon\} \subset M$. Wir definieren

$$\alpha_i^\varepsilon(x) = \psi_i^\varepsilon(Tx - y_i), \quad x \in M_\varepsilon.$$

Dann ist $\alpha_i^\varepsilon : M_\varepsilon \to [0,1]$ stetig und $\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ für alle $x \in M_\varepsilon$. Wir definieren

$$T_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x) y_i \in M_\varepsilon, \quad x \in M_\varepsilon.$$

Dann ist $T_\varepsilon : M_\varepsilon \to M_\varepsilon$ stetig. Nach Satz 1.5 hat T_ε einen Fixpunkt $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$. Ferner haben wir

$$T_\varepsilon x - Tx = \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x)(y_i - T(x)) = \sum_{\substack{i=1 \\ \|y_i - T(x)\| \le \varepsilon}}^{m_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x)(y_i - T(x))$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung findet man

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| \le \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x)\varepsilon \le \varepsilon.$$

Da $\overline{T(M)}$ kompakt ist, existiert eine Folge $\varepsilon_j \to 0$ für $j \to +\infty$, so dass $x_{\varepsilon_j} \to x$ in $\overline{T(M)}$ für $j \to +\infty$. Da T stetig ist, folgt $T(x_{\varepsilon_j}) \to T(x)$ in M für $j \to +\infty$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}\|Tx - x\| &\leq \|Tx - Tx_{\varepsilon_j}\| + \|Tx_{\varepsilon_j} - T_{\varepsilon_j}x_{\varepsilon_j}\| + \|x_{\varepsilon_j} - x\| \\ &\leq \|Tx - Tx_{\varepsilon_j}\| + \varepsilon_j + \|x_{\varepsilon_j} - x\|.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite gegen 0 konvergiert folgt $Tx = x$. ■

Satz 1.7 (**Leray-Schauder**) *Sei $T : X \to X$ stetig, so dass $T(M)$ in X relativ kompakt für jede beschränkte Menge M. Ferner sei die Menge $\{x \in X \,|\, x = \lambda T(x),\ \text{für ein}\ \lambda \in [0,1]\}$ in X beschränkt. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis Nach Voraussetzung existiert ein $0 < R < +\infty$, so dass

$$\{x \in X \,|\, x = \lambda T(x) \text{ für ein } \lambda \in [0,1]\} \subset B_R(0).$$

Wir definieren

$$L(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad \|x\| \leq R \\ R\frac{x}{\|x\|} & \text{falls} \quad \|x\| > R. \end{cases}$$

Dann ist $L : X \to X$ stetig. Wir setzen $F = L \circ T|_{\overline{B_R(0)}}$. Dann ist $F : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$ stetig und $F(\overline{B_R(0)})$ ist relativ kompakt in X. Gemäß Satz 1.6 existiert ein $x_* \in \overline{B_R(0)}$ mit $F(x_*) = x_*$. Falls $\|T(x_*)\| \leq R$, so ist x_* Fixpunkt von T. Anderenfalls wäre

$$F(x_*) = R\frac{T(x_*)}{\|T(x_*)\|} = x_*.$$

Wegen $\|T(x_*)\| > R$ ist $\lambda = \frac{R}{\|T(x_*)\|} \in [0,1]$ und $x_* = \lambda T(x_*) \in B_R(0)$. Dies widerspicht aber $\|x_*\| = \|F(x_*)\| = R$. Folglich hat T einen Fixpunkt. ■

Folgerung 1.8 *Sei $T : X \to X$ stetig und kompakt und $T(X)$ beschränkt. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Satz 1.9 *Sei $\boldsymbol{F} : \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $(\boldsymbol{F}(x), x) \geq 0$ für alle $x \in \partial B_R$. Dann existiert ein $x \in \overline{B_R(0)}$ mit $\boldsymbol{F}(x) = 0$.*

Beweis Angenommen $\boldsymbol{F}$ hat keine Nullstelle, dann existiert ein $\alpha > 0$, so dass $|\boldsymbol{F}(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in \overline{B_R(0)}$. Wir setzen $\boldsymbol{G}(x) := -R\frac{\boldsymbol{F}(x)}{|\boldsymbol{F}(x)|}$. Dann ist $\boldsymbol{G} : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$ stetig. Nach Satz 1.5 existiert ein $x \in \overline{B_R(0)}$, so dass $\boldsymbol{G}(x) = x$. Insbesondere ist $x \in \partial B_R$. Nach Vorrausstzung haben wir $R^2 = |x|^2 = (\boldsymbol{G}(x), x) = -\frac{R}{|\boldsymbol{F}(x)|}(\boldsymbol{F}(x), x) \leq 0$, was aber ein Widerspruch ist. Also ist die Behauptung richtig. ■

2. Monotone Operatoren

Motivation: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, nicht fallend nicht, nach oben und unten beschränkt, so ist f surjektiv. Diese Aussage lässt sich auf Operatoren $F : X \to X$ verallgemeinern.

Im folgenden sei X ein reeller Banachraum. Mit X^* bezeichnen den Dualraum von X, welche besteht aus der Menge aller stetigen linearen Funktionalen $x^* : X \to \mathbb{R}$. Für $x \in X, x^* \in X^*$ schreiben wir: $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$.

Definition 2.1 Sei $F : X \to X^*$ ein Operator.

(a) F heißt *monoton*, genau dann wenn

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

(b) F heißt *koerziv*, genau dann wenn

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} \to +\infty.$$

(c) F heißt *hemistetig*, genau dann wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ die Abbildung $t \mapsto \langle F(x_1 + tx_2), x_3 \rangle$ von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ stetig ist.

(d) F heißt *demistetig*, genau dann wenn, aus $x_k \to x$ in X für $k \to +\infty$ folgt

$$F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} F(x) \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad k \to +\infty\,^{1)}.$$

Lemma 2.2 *Sei $F : X \to X^*$ monoton. Dann ist F lokal beschränkt, d. h. zu jedem $x_0 \in X$ existiert ein $r > 0$, so dass $F(B_r(x_0))$ in X^* beschränkt ist.*

Beweis. Annahme F ist nicht lokal beschränkt in x_0. Dann existiert eine Folge $x_k \to x_0$ und $\|F(x_k)\|_{X^*} \to +\infty$ für $k \to +\infty$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\|F(x_k)\|_{X^*} \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $y \in X$ beliebig gewählt. Da F monoton ist haben wir

$$\begin{aligned} & 0 \leq \langle F(x_k) - F(x_0 + y), x_k - x_0 - y \rangle \\ \iff \quad & \langle F(x_k), y \rangle \leq \langle F(x_k), x_k - x_0 \rangle - \langle F(x_0 + y), x_k - x_0 - y \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\langle F(x_k), y \rangle \leq \|F(x_k)\|_{X^*} \|x_k - x_0\|_X + \|F(x_0 + y)\|_{X^*} (\|x_k - x_0\|_X + \|y\|).$$

Wir definieren $f_k \in X^*$ gemäß

$$f_k = \frac{F(x_k)}{1 + \|F(x_k)\|_{X^*} \|x_k - x_0\|_X}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1) Sei (f_k) eine Folge in X^*. Wir sagen $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* für $k \to +\infty$, falls $\langle f_k, x \rangle \to \langle f, x \rangle$ für alle $x \in X$.

Aus der obigen Ungleichung schließt man

$$\langle f_k, y\rangle \leq 1 + \|F(x_0 + y)\|_{X^*}(1 + \|y\|_{X^*}) \quad \forall\, y \in X.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist (f_k) in X^* beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$, so dass $\|f_k\|_{X^*} \leq M$. Gemäß der Definition von f_k erhält man

$$\|F(x_k)\|_{X^*} \leq M(1 + \|F(x_k)\|_{X^*}\|x_k - x_0\|_X) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - x_0\|_X \leq \frac{1}{2M}$ für alle $k \geq k_0$. Folglich wäre

$$\frac{1}{2}\|F(x_k)\|_{X^*} \leq M \quad \forall\, k \geq k_0,$$

was aber der Annahme widerspricht. Also ist F lokal beschränkt. ■

Beispiel 2.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $0 \leq f'(s) \leq L$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir setzen $X := W_0^{1,2}(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|v\|_X = \Big(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}, \quad v \in X.$$

Poincaré-Ungleichung: Es existiert eine Konstante $c_0 > 0$, so dass

$$\|v\|_{L^2} \leq c_0\|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall\, v \in X.$$

Dies impliziert

$$\|v\|_X \leq \sqrt{1 + c_0^2}\|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall\, v \in X.$$

Betrachte Abbildung $F : X \to X^*$ gegeben durch

$$\langle F(u), v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega f(u) v dx, \quad u, v \in X.$$

(i) F ist wohldefiniert: HS der IDR liefert $f(s) = f(0) + \int\limits_0^1 f'(\tau s) s d\tau$. Hiermit ergibt sich

$$|f(s)| \leq |f(0)| + L|s| \quad \forall\, s \in R.$$

Seien $u, v \in X$. Mithilfe der obigen Ungleichung und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung findet man

$$\begin{aligned}
|\langle F(u), v\rangle| &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx + \int_\Omega |f(u)||v| dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \int_\Omega (|f(0)| + L|u|)|v| dx \\
&\leq \|u\|_X\|v\|_X + \Big(\int_\Omega 1 dx\Big)^{1/2}\|v\|_{L^2} + L\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq (|\Omega|^{1/2} + (1 + L)\|u\|_X)\|v\|_X.
\end{aligned}$$

(ii) F ist monoton. Seien $u_1, u_2 \in X$. Dann

$$\begin{aligned}\langle F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2 \rangle &= \int\limits_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx \\ &\quad + \int\limits_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) dx \\ &\geq \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2} \geq 0.\end{aligned}$$

(iii) F ist koerziv. Sei $u \in X$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\langle F(u), u\rangle &= \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega f(u) u dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int\limits_\Omega (f(u) - f(0))(u - 0) dx + \int\limits_\Omega f(0) u dx \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2}^2 - |\Omega|^{1/2} |f(0)| \|u\|_X \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2}} \|u\|_X^2 - |\Omega|^{1/2} |f(0)| \|u\|_X.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\langle F(u), u\rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2}} \|u\|_X - |\Omega|^{1/2} |f(0)| \to +\infty \quad \text{für} \quad \|u\|_X \to +\infty.$$

(iv) F ist hemistetig. Seien $u_1, u_2, u_3 \in X$.

$$\begin{aligned}\Phi(t) = \langle F(u_1 + t u_2), u_3\rangle &= \int\limits_\Omega (\nabla u_1 + t \nabla u_2) \cdot \nabla u_3 dx + \int\limits_\Omega f(u_1 + t u_2) u_3 dx \\ &= \Phi_1(t) + \Phi_2(t).\end{aligned}$$

1) $\Phi_1(t) = \int\limits_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_3 dx + t \int\limits_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_3 dx$ ist stetig.

2) Seien $t_0, t \in [0, 1]$. Dann

$$|\Phi_2(t_0) - \Phi_2(t)| \leq \int\limits_\Omega |f(u_1 + t u_2) - f(u_1 + t_0 u_2)| |u_3| dx \leq L |t - t_0| |\Omega|^{1/2} \|u_2\|_X \|u_3\|_X.$$

Dies zeigt, dass Φ stetig ist.

Lemma 2.4 (**Lemma von Minty**) *Sei $F : X \to X^*$ monoton und hemistetig. Dann gilt:*

(a) Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$\begin{aligned}&x_k \rightharpoonup x \quad \textit{in} \quad X, \quad F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \textit{in} \quad X^*, \\ &\langle F(x_k), x_k\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{für} \quad k \to +\infty,\end{aligned}$$

so folgt $f = F(x)$.

(b) F ist demistetig.

Beweis (a) Sei $\widetilde{x} \in X$, F monoton

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle F(x_k) - F(\widetilde{x}), x_k - \widetilde{x} \rangle \\
&= \langle F(x_k), x_k \rangle - \langle F(x_k), \widetilde{x} \rangle - \langle F(\widetilde{x}), x_k \rangle + \langle F(\widetilde{x}), \widetilde{x} \rangle \\
&\underset{k\to\infty}{\to} \langle f, x \rangle - \langle f, \widetilde{x} \rangle - \langle F(\widetilde{x}), x \rangle + \langle F(\widetilde{x}), \widetilde{x} \rangle \\
&= \langle f - F(\widetilde{x}), x - \widetilde{x} \rangle.
\end{aligned}$$

Setzt man für $\widetilde{x} = x + ty$ mit $y \in X$ und $t \in (0, 1]$, so folgt

$$0 \le \langle f - F(x + ty), -ty \rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle f - F(x + ty), y \rangle \le 0.$$

Da F hemistetig ist, folgt mit $t \to 0$,

$$\langle f - F(x), y \rangle \le 0 \quad \forall\, y \in X.$$

Dies impliziert $f = F(x)$.

(b) Sei (x_k) eine Folge mit $x_k \to x_0$ in X für $k \to +\infty$. Gemäß Lemma 2.2 ist F lokal beschränkt. Folglich existiert ein $M > 0$, so dass

$$\|F(x_k)\|_{X^*} \le M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Sei $y \in X$ beliebig gewählt. Wir definieren $\widetilde{X} = \overline{\operatorname{span}\{y, x_1, x_2, \ldots\}}$. Dann ist $\widetilde{X}$ ein separabler Banachraum. Wir definieren $\widetilde{F}(x_k) := F(x_k)|_{\widetilde{X}}$. Offensichtlich ist $(\widetilde{F}(x_k))$ in $\widetilde{X}^*$ beschränkt. Unter Verwendung des Satzes von Banach-Alaoglu existiert eine Teilfolge (x_{k_j}) und ein $f \in \widetilde{X}^*$, so dass

$$\widetilde{F}(x_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in} \quad \widetilde{X}^* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wie man leicht sieht ist $x_0 \in \widetilde{X}$ und es gilt $\langle \widetilde{F}(x_{k_j}), x_{k_j} \rangle \to \langle f, x_0 \rangle$ für $j \to +\infty$. In der Tat,

$$\begin{aligned}
|\langle \widetilde{F}(x_{k_j}), x_{k_j} \rangle - \langle f, x_0 \rangle| &= |\langle F(x_{k_j}), x_{k_j} - x_0 \rangle| + |\langle \widetilde{F}(x_{k_j}) - f, x_0 \rangle| \\
&\le M \|x_{k_j} - x_0\|_X + |\langle \widetilde{F}(x_{k_j}) - f, x_0 \rangle| \\
&\to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun $\widetilde{F} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}^*$ gemäß

$$\widetilde{F}(x) = F(x)|_{\widetilde{X}}, \quad x \in \widetilde{X}.$$

Dann ist $\widetilde{F}$ monoton und hemistetig. Gemäß (a) folgt somit $f = \widetilde{F}(x_0)$. Folglich gilt $\widetilde{F}(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{F}(x_0)$ in $\widetilde{X}^*$ für $k \to +\infty$. Insbesondere haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \langle F(x_k), y \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \widetilde{F}(x_k), y \rangle = \langle \widetilde{F}(x_0), y \rangle = \langle F(x_0), y \rangle.$$

Somit

$$F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} F(x_0) \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Also ist F demi-stetig. ■

Satz 2.5 (**Browder-Minty**) *Sei X reflexiv und separabel. Sei $F : X \to X^*$ monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann ist F surjektiv, d.h. für jedes $f \in X^*$ existiert ein $x \in X$, so dass $F(x) = f$.*

Beweis. Da X separabel ist, existiert eine Folge (a_k) linear unabhängiger Vektoren, so dass

$$\overline{\operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}} = X.$$

Wir definieren

$$X_n := \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt: $X_n \subset X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Galerkin-Verfahren: Wir definieren die Isometrie $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to X_n$, durch

$$\Phi_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Als nächstes definieren wir $G_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(G_n(\xi), \eta) = \langle F(\Phi_n(\xi)) - f, \Phi_n(\eta) \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Zunächst zeigen wir, dass G_n stetig ist. In der Tat, sei (ξ_k) eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\xi_k \to \xi$ in $\mathbb{R}^n$. Da Φ_n ein Isomorphismus ist ergibt sich $\Phi_n(\xi_k) \to \Phi_n(\xi)$ in X für $k \to +\infty$. Nach Lemma 2.4/(b) ist F demistetig. Folglich haben wir

$$F(\Phi_n(\xi_k)) \overset{*}{\rightharpoonup} F(\Phi(\xi)) \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Hiermit folgert man für jedes $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$(G_n(\xi_k), \eta) = \langle F(\Phi_n(\xi_k)) - f, \Phi_n(\eta) \rangle \to \langle F(\Phi_n(\xi)) - f, \Phi_n(\eta) \rangle = (G_n(\xi), \eta)$$
$$\text{für} \quad k \to +\infty.$$

Somit ist G_n schwach stetig, also auch stark stetig.

Da F koerziv ist, existiert ein $c_1 > 0$, so dass

$$\langle F(x), x \rangle \geq \|f\|_{X^*} \|x\|_X, \quad \forall\, x \in X, \|x\|_X \geq c_1.$$

Da Φ_n Isomorphismus ist existieret $c_2 > 0$, so dass

$$\|\Phi_n(\xi)\|_X \geq c_2^{-1} |\xi| \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Folglich

$$\|\Phi_n(\xi)\|_X \geq c_1 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \geq c_1 c_2.$$

Hiermit bekommt man für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = c_1 c_2$

$$\begin{aligned}(G_n(\xi), \xi) &= \langle F(\Phi_n(\xi)) - f, \Phi_n(\xi)\rangle \\ &\geq \|f\|_{X^*}\|\Phi_n(\xi)\|_X - \|f\|_{X^*}\Phi_n(\xi)\|_X \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz, Satz 1.9, existiert ein $\xi_n \in \mathbb{R}^n$, so dass $G_n(\xi_n) = 0$, was equivalent ist zu

$$\langle F(x_n), w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in X_n, \quad x_n := \Phi_n(\xi_n).$$

(i) Wir zeigen nun, dass (x_n) in X beschränkt ist. Wir nehmen an, $\|x_n\|_X \to +\infty$. Aus der obigen Identität und der Koerzivität von F folgt

$$\left\langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right\rangle = \frac{\langle F(x_n), x_n\rangle}{\|x_n\|_X} \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|_X}\rangle \leq \|f\|_{X^*}$. Somit ist (x_n) in X beschränkt. Gemäß Lemma 2.2 ist F lokal beschränkt. Folglich existiert ein $r > 0$ und ein $M > 0$, so dass

$$\|F(x)\|_{X^*} \leq M \quad \forall\, x \in \overline{B_r(0)}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{B_r(0)}$. Dann folgt aus der Monotonie und $\langle F(x_n), x_n\rangle = \langle f, x_n\rangle$

$$\begin{aligned}\langle F(x_n), x\rangle &= \langle F(x_n), x - x_n\rangle + \langle F(x_n), x_n\rangle \\ &= \langle F(x_n) - F(x), x - x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle + \langle F(x), x - x_n\rangle \\ &\leq \|f\|_{X^*}\|x_n\|_X + M(\|x\|_X + \|x_n\|_X) \leq C_0.\end{aligned}$$

Hieraus schließt man $\|F(x_n)\|_{X^*} \leq C_0 r^{-1}$. Aufgrund der Reflexivität von X und der schwach-$*$ Kompaktheit beschränkter Mengen in X^* findet man eine Teilfolge (x_{n_j}) und Elemente $x \in X$ sowie $g \in X^*$, so dass

$$\begin{aligned} x_{n_j} &\rightharpoonup x \quad \text{in} \quad X, \\ F(x_{n_j}) &\overset{*}{\rightharpoonup} g \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.\end{aligned}$$

Sei $w \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}$, d.h $w \in X_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_j \geq m$ für alle $j \geq j_0$. Dann

$$\langle g, w\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), w\rangle = \langle f, w\rangle.$$

Da $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}$ dicht in X ist, erhält man $g = f$. Auf der anderen Seite haben wir

$$\lim_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), x_{n_j}\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f, x_{n_j}\rangle = \langle f, x\rangle$$

Nach Lemma 2.4 (a) ergibt sich $f = F(x)$. ■

Bemerkung 2.5' Ist F zusätzlich strikt monoton, d. h.

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \text{mit} \quad x_1 \neq x_2,$$

dann existiert für jedes $f \in X^*$ genau eine Lösung $x \in X$ von $F(x) = f$.
Angenommen es gibt $\widetilde{x} \in X$ mit $\widetilde{x} \neq x$ und $F(\widetilde{x}) = f$, so wäre

$$0 = \langle F(x) - F(\widetilde{x}), x - \widetilde{x} \rangle > 0,$$

was aber ein Widerspruch ist. ■

Anwendung Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq f'(s) \leq L$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Problem

$$(*) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz 2.6 *Sei $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p > 2)$. Für jedes $g \in X^*$ existiert genau ein $u \in X$, so dass*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx = \langle g, v \rangle \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis Wir definieren $F : X \to X^*$ durch

$$\langle F(u), v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in X.$$

Bekanntlich ist X ein separabler, reflexiver Banachraum. Wir zeigen F ist strikt monoton. Hierzu betrachten wir $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $S(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir berechnen

$$\frac{\partial S_i}{\partial \xi_j}(\xi) = (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j + |\xi|^{p-2}\delta_{ij}.$$

Mithilfe der Newton-Leibniz Formel findet man

$$\begin{aligned} & S_i(\xi) - S_i(\eta) \\ & = (p-2)\int_0^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-4}(t\xi_i + (1-t)\eta_i)(t\xi_j + (1-t)\eta_j)(\xi_j - \eta_j)dt \\ (2) \qquad & \qquad + \int_0^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-2}\delta_{ij}(\xi_j - \eta_j)dt \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Hieraus ergibt sich

$$|S(\xi) - S(\eta)| \leq (p-1)(|\xi| + |\eta|)^{p-2}|\xi - \eta| \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

(i) *Stetigkeit* Seien $u, v, w \in X$. Mithilfe der obigen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
|\langle F(u) - F(v), w\rangle| &\leq \left| \int_\Omega (S(\nabla u) - S(\nabla v)) \cdot \nabla w dx \right| \\
&\leq (p-1) \int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla u - \nabla v|\, |\nabla w| dx \\
&\leq (p-1)(\|u\|_X^{p-2} + \|u\|_X^{p-2})\|u - v\|_X \|w\|_X
\end{aligned}$$

Somit

$$\|F(u) - F(v)\|_{X^*} \leq (p-1)(\|u\|_X^{p-2} + \|u\|_X^{p-2})\|u - v\|_X.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von F.

(ii) *Monotonie* Seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq \eta$. Wir multiplizieren beide Seiten von (2) mit $(\xi_i - \eta_i)$ und summieren das Ergebnis über $i = 1, \ldots, n$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&(S(\xi) - S(\eta)) \cdot (\xi - \eta) = \\
&= (p-2) \int_0^1 \|t\xi + (1-t)\eta\|^{p-4} [(t\xi + (1-t)\eta) \cdot (\xi - \eta)]^2 dt \\
&\quad + \int_0^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-2} |\xi - \eta|^2 \\
&\geq \int_0^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-2} dt |\xi - \eta|^2
\end{aligned}$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $|\xi| \geq |\eta|$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-2} \\
&\geq \int_{3/4}^1 |t\xi + (1-t)\eta|^{p-2} dt \geq \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{4}|\xi| - \frac{1}{4}|\eta|\Big)^{p-2} \\
&\geq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4}(|\xi| + |\eta|)\Big)^{p-2} = 4^{1-p}(|\xi| + |\eta|)^{p-2}.
\end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\langle F(u) - F(v), u - v\rangle &= \int_\Omega (S(\nabla u) - S(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\
&\geq 4^{1-p} \int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla u|)^{p-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx.
\end{aligned}$$

(iii) F *ist koerziv.* Mithilfe der Poincaré-Ungleichung schließen wir

$$\langle F(u), u\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \frac{1}{1+c_0^p}\|u\|_X^p.$$

Dies impliziert, dass F koerziv ist.

Nach Satz 2.5 existiert für jedes $g \in X^*$ genau eine Lösung $u \in X$ von $F(u) = g$ in X^*. ∎

Pseudomonotone Operatoren

Im folgenden werden wir den Begriff der Monotonie erweitern, um eine größere relevante Klasse nichtlinearer Gleichungen lösen zu können. Hierzu die folgende

Definition 2.7 Ein Operator $F : X \to X^*$ heißt *pseudomonoton*, falls aus

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in} \quad X \quad \text{für} \quad n \to +\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle \le 0,$$

folgt, dass

$$\langle F(x), x - y\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - y\rangle \quad \forall\, y \in X.$$

Lemma 2.8 *Sei $F : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

(i) Ist F monoton und hemistetig, so ist F pseudomonoton.

(ii) Ist F pseudomonoton und lokal beschränkt, so ist F demistetig.

Beweis (i) Sei (x_n) eine Folge in X mit

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \quad \text{für} \quad n \to +\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle \le 0.$$

Da F monoton ist, haben wir

$$\langle F(x_n), x_n - x\rangle \ge \langle F(x), x_n - x\rangle.$$

Hieraus ergibt sich

$$\liminf_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle \ge \lim_{n\to\infty} \langle F(x), x_n - x\rangle \;=\; 0 \ge \limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle = 0.$$

Sei $y \in X$ beliebig. Da F monoton ist, haben wir

$$\langle F(x + t(y - x)) - F(x_n), x + t(y - x) - x_n\rangle \ge 0.$$

Nach Umformung folgt

$$\begin{aligned} & t\langle F(x + t(y - x)), x - y\rangle \\ &\quad \le \langle F(x_n), x_n - x\rangle + t\langle F(x_n), x - y\rangle + \langle F(x + t(y - x)), x_n - x\rangle \\ &\quad = (1 - t)\langle F(x_n), x_n - x\rangle + t\langle F(x_n), x_n - y\rangle + \langle F(x + t(y - x)), x_n - x\rangle. \end{aligned}$$

Mithilfe der obigen Konvergenzeigenschaft schließt man

$$t\langle F(x + t(y - x)), x - y\rangle \le t \liminf_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - y\rangle.$$

Wir dividieren beide Seiten durch t und führen anschließend den Grenzübergang $t \to 0^+$ aus. Da F hemistetig ist ergibt sich

$$\langle F(x), x - y\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle F(x_{}), x_n - y\rangle.$$

Dies zeigt, dass F pseudomonoton ist.

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x$ in X für $n \to +\infty$. Da F lokal beschränkt ist, ist die Folge $(F(x_n))$ in X^* beschränkt. Mithilfe des Satzes von Banach-Alaoglu findet man eine Teilfolge (x_{n_j}) und ein $f \in X^*$, so dass

$$F(x_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\limsup_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - x\rangle = 0.$$

Sei $y \in X$ beliebig. Da F pseudomonoton ist haben wir

$$\langle F(x), x - y\rangle \leq \liminf_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle = \langle f, x - y\rangle.$$

Dies impliziert mit $z = x - z$

$$\langle F(x), z\rangle \leq \langle f, z\rangle \quad \forall\, z \in X.$$

Folglich ist $f = F(x)$, also F auch demistetig. ∎

Satz 2.9 *Sei X separabel und reflexiv. Sei $F : X \to X^*$ pseudomonoton, koerziv und beschränkt (d.h. für jede in X beschränkte Menge M ist $F(M)$ in X^* beschränkt). Dann ist F surjektiv, das heißt, für alle $f \in X^*$ ist $F(x) = f$ lösbar.*

Beweis Sei $f \in X^*$ gegeben. Sei $\{a_1, a_2, \ldots\}$ und X_n wie im Beweis von Satz 2.5. Aus Lemma 2.8 folgt dass F demistetig und koerziv ist. Wie im Beweis von Satz 2.5 zeigt man die Existenz eines $x_n \in X_n$, so dass

$$\langle F(x_n), w\rangle = \langle f, w\rangle \qquad \forall\, w \in X_n.$$

Außerdem folgt aus der Koerzivität von F, dass (x_n) in X und mithin $(F(x_{n_j}))$ in X^* beschränkt sind. Aufgrund der Reflexivität von X und dem Satz von Banach-Alaoglu gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) und $x \in X$ sowie $g \in X^*$, so dass

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad \text{in} \quad X, \quad F(x_{n_j}) \rightharpoonup g \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wie im Beweis von Satz 2.5 zeigt man, dass $g = f$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F(x) = f$. Denn

$$\begin{aligned}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - x\rangle &= \langle F(x_{n_j}), x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), x\rangle \\ &= \langle f, x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), x\rangle \\ &\to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir $\limsup_{j\to\infty}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - x\rangle \leq 0$. Da F pseudomonoton ist erhalten wir

$$\langle F(x), x-y\rangle \leq \liminf_{j\to\infty}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle \quad \forall\, y \in X.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle = \langle f, x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), y\rangle \to \langle f, x-y\rangle \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Setzt man $y = x - z$, so folgt $\langle F(x), z\rangle \leq \langle f, z\rangle$, für alle $z \in X$, was impliziert, dass $F(x) = f$. ■

Beispiel 2.10 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$|f(s)| \leq a_0(1 + |s|) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Sei $X := W^{1,p}(\Omega)$ ($p > 2$). Wir definieren $A : X \to X^*$ durch

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + f(u)v dx, \quad u, v \in X.$$

Wegen $|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in L^{p'}(\Omega)$ folgt mithilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}|\langle A(u), v\rangle| &\leq \|\nabla u\|_{L^p}^{p'}\|\nabla v\|_{L^p} + a_0\int_\Omega (1+|u|)|v| dx \\ &\leq \|u\|_X^{p'}\|v\|_X + a_0|\Omega|^{1/p'}\|v\|_X + a_0\|u\|_X\|v\|_X.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\|A(u)\|_{X^*} \leq \|u\|_X^{p'} + a_0(|\Omega|^{1/p'} + \|u\|_X)$$

Insbesondere ist A beschränkt.

(i) Wir zeigen A ist pseudomonoton: Hierfür sei (u_k) eine Folge mit

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{für} \quad k \to +\infty, \quad \limsup_{k\to\infty}\langle A(u_k), u_k - u\rangle \leq 0.$$

Da die Einbettung $X \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt ist folgt

$$u_k \to u \quad \text{in} \quad L^p(\Omega) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Folglich ist $(f(u_k))$ in $L^{p'}(\Omega)$ beschränkt. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert eine Teilfolge (u_{k_j}) so dass $u_{k_j} \to u$ fast überall in Ω für $j \to +\infty$. Unter Verwendung des Satzes von Vitali und der Stetigkeit von f folgt

$$f(u_{k_j}) \to f(u) \quad \text{in} \quad L^{p'}(\Omega) \quad \text{für} \quad j \to +\infty$$

Da der Grenzwert eindeutig ist, konvergiert die gesamte Folge. Dies zeigt, dass

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{in} \quad L^{p'}(\Omega) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle A(u_k), u_k - v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot (\nabla u_k - \nabla v) + f(u_k)(u_k - v)dx \\ &= \langle F(u_k), u_k - v\rangle + \int_\Omega f(u_k)(u_k - v)dx \\ &\geq \langle F(v), u_k - v\rangle + \int_\Omega f(u_k)(u_k - v)dx \\ &\to \langle A(u), u - v\rangle \quad \text{für} \quad k \to +\infty.\end{aligned}$$

(ii) *Wir zeigen A ist koerziv* Wir haben

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega f(u)udx \\ &\geq \frac{1}{1+c_0^p}\|u\|_X^p - a_0\int_\Omega (|u| + |u|^2)dx \geq \frac{1}{1+c_0^p}\|u\|_X^p - c_1\|u\|_X^2 \\ &\geq \frac{1}{2(1+c_0^p)}\|u\|_X^p - c_2.\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{1}{2(1+c_0^p)}\|u\|_X^{p-1} - c_2\|u\|_X^{-1} \to +\infty \quad \text{für} \quad \|u\|_X \to +\infty.$$

(iii) A ist hemistetig, denn A ist sogar stetig.

Gemäß Satz 2.9 existiert für jedes $g \in X^*$ ein $u \in X$ so dass $A(u) = g$. Das heißt $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist schwache Lösung von

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u) = g \quad \textit{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \textit{auf} \quad \partial\Omega.$$

3. Maximal monotone Operatoren

Beipiele in $\mathbb{R}$. 1. Sei $f(x) = x^3$. Dann ist f monoton und stetig also maximal monoton.
2. Die Abbildung $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ist monoton, aber nicht maximal monoton. Veranschaulichung am Graphen. Erweiterung zu einem maximal monotonen Operators $\overline{f} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ [0,1] & \text{für} \quad x = 0, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

(Hier bezeichne 2^X die Potenzmenge von X)

Dies führt zu mehrdeutigen Abbildungen.

Definition 3.1 Seien X, Y Mengen. Sei $A : X \to 2^Y$ eine Abbildung. Das heißt für jedes $x \in X$ ist $A(x) \subset X$. Dann heißt

(i) $D(A) = \{x \in X \,|\, A(x) \neq \emptyset\}$ der *effektive Definitionsbereich* von A,

(ii) $R(A) = \cup_{x \in D(A)} A(x)$ der *Wertebereich* von A

(iii) $G(A) = \{(x,y) \,|\, x \in D(A), y \in A(x)\}$ der *Graph* von A.

(iv) Die *Umkehrabbildung* $A^{-1} : Y \to 2^X$ von A ist definiert durch

$$A^{-1}(y) = \{x \in D(A) \,|\, y \in A(x)\}.$$

Offensichtlich gilt

$$D(A^{-1}) = R(A), \quad R(A^{-1}) = D(A),$$
$$G(A^{-1}) = \{(y,x) \,|\, y \in D(A^{-1}), x \in A^{-1}(y)\} = \{(y,x) \,|\, (x,y) \in G(A)\}.$$ [2)]

Ferner haben wir $G(A^{-1}) = G(A)^t$.

Bemerkung 3.2 1. Seien X, Y lineare Räume. Seien $A, B : X \to 2^Y$ Abbildungen. Dann definieren wir $\alpha A + \beta B : X \to 2^Y$ durch

$$D(\alpha A + \beta B) = \{x \in X |\, A(x) \cap B(x) \neq \emptyset\}$$

[2)] Man beachte, $y \in D(A^{-1}), x \in A^{-1}(y)$ genau, dann wenn $y \in R(A), x \in D(A)$, $y \in A(x)$.

und

$$(\alpha A + \beta B)(x) = \{\alpha y_1 + \beta y_2 \,|\, y_1 \in A(x), y_2 \in B(x)\}.$$

Ist $A : D(A) \subset X \to Y$ ein Operator, so kann man A als mehrdeutige Abbildung $\overline{A} : X \to 2^Y$ auffassen, gemäß

$$\overline{A}(x) = \begin{cases} \{A(x)\} & \text{falls} \quad x \in D(A), \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den folgenden Betrachtungen schreiben wir stets A statt $\overline{A}$.

Definition 3.3 Sei X Banachraum. Die Abbildung $A : X \to 2^{X^*}$ heißt *monoton*, falls

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall\, u, v \in D(A), \quad u^* \in A(u), \quad v^* \in A(v).$$

Sei $M \subset X$. $A : M \to 2^{X^*}$ heißt *maximal monoton*, falls F monoton ist und für $(u, u^*) \in M \times X^*$ mit

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in D(A), v^* \in A(v)$$

folgt dass $u \in D(A)$ und $u^* \in F(u)$.

Bemerkung 3.4 1. Ist $A : D(A) \subset X \to X^*$ monoton, so ist A maximal monoton, falls aus

$$\langle u^* - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in D(A),$$

folgt, dass $u \in D(A)$ und $u^* = A(u)$.

2. Ferner besagt die maximale Monotonie, dass der Graph $G(A)$ nicht monoton erweiterbar ist.

Lemma 3.5 *Sei $A : X \to X^*$ ein monotoner hemistetiger Operator. Dann ist F maximal monoton.*

Beweis Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$, so dass

$$\langle u^* - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in X.$$

Mit $v = u - tw$ für $w \in X$ und $t \in [0, 1]$ folgt

$$\langle u^* - A(u + tw), w \rangle \geq 0.$$

Nach $t \to 0^+$ unter Verwendung der Hemistetigkeit bekommt man

$$\langle u^* - A(u), w \rangle \geq 0 \quad \forall\, w \in X.$$

Dies impliziert $u^* = A(u)$. ∎

Lemma 3.6 *Sei X reflexiv. Sei $A : X \to 2^{X^*}$ maximal monoton. Dann ist $A^{-1} : X^* \to 2^X$ maximal monoton.*

Beweis Da X reflexiv ist, gilt $\varepsilon : X \cong X^{**}$, wobei $\langle \varepsilon(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$. Folglich können wir $A^{-1} : X^* \to 2^{X^{**}}$ schreiben, wobei

$$G(A^{-1}) = \{(x^*, \varepsilon(x)) \,|\, x \in D(A), x^* \in A(x)\} \cong \{(x^*, x) \,|\, x \in D(A), x^* \in A(x)\}.$$

Das heißt $x^{**} \in A^{-1}(x^*)$ gdw. für $x = \varepsilon^{-1}(x^{**})$ gilt $x^* \in A(x)$.

Seien u^*, u^{**}, so dass

$$\langle u^{**} - v^{**}, u^* - v^* \rangle_{X^*} \geq 0 \quad \forall\, v^* \in D(A^{-1}), v^{**} \in A^{-1}(x^*)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \langle u^* - v^*, u - v \rangle \quad \forall\, v^* \in D(A^{-1}), v \in A^{-1}(x^*) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle u^* - v^*, u - v \rangle \quad \forall\, v \in D(A), v^* \in A(x). \end{aligned}$$

Da A maximal monoton ist, folgt $u^* \in A(u)$, was äquivalent ist zu $\varepsilon(u) = u^{**} \in A(u^*)$. Also ist A^{-1} maximal monoton. ∎

Subdifferantial

Definition 3.7 Sei $f : X \to [-\infty, \infty]$ Funktional. Ein Element $u^* \in X^*$ heißt **Subgradient** von f in $u \in X$, falls $f(u) \in \mathbb{R}$ und

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle_X \quad \forall\, v \in X.$$

Die Menge aller Subgradienten in u heißt **Subdifferential** in u und wird mit $\partial f(u)$ bezeichnet. Falls kein Subgradient existiert, setzen wir $\partial f(u) = \emptyset$. F heißt *subdifferenzierbar* in $u \in X$, falls $\partial f(u) \neq \emptyset$.

Lemma 3.8 Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$ und ist $\partial f(x) \neq \emptyset$, so gilt $\partial f(x) = \{f'(x)t\}$.

Beweis Sei $x^* = \{at\} \in \mathbb{R}^*$, so dass

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle = a(y - x) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq a$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$. Aus der Definition von $f'(x)$ folgt $f'(x) \geq a$. Analog zeigt man $f'(x) \leq a$, also $a = f'(x)$. ∎

Beispiel 3.9 1) $f(x) = |x|$. Dann ist $\partial f(x) = \{1\}$ für alle $x > 0$, $\partial f(x) = \{-1\}$ für alle $x < 0$ und $\partial f(0) = [-1, 1]$. Sei $a \in [-1, 1]$. Dann

$$a(0 - y) \leq |a||y| \leq |0| - |y| = f(0) - f(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

2) Sei $C \subset X$ convex und abgeschlossen mit $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$. Sei I_C die Indicatorfunktion

$$I_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{für} u \in C \\ \infty & \text{für} u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Sei $u \in \partial C$. Nach dem Satz von Mazur existiert ein $u^* \in X^*$, so dass

$$\langle u^*, v - u\rangle \leq 0 \quad \forall\, v \in C \Leftrightarrow I_C(v) = 0 \geq I_C(u) + \langle u^*, v - u\rangle \quad \forall\, v \in C.$$

Folglich ist $u^* \in \partial I_C(u)$. Ist $u \in \mathrm{int}(C)$, so ist $\partial I_C(u) = \{0\}$. Somit ist I_C in C subdifferenzierbar.

Definition 3.10 $f : X \to (-\infty, \infty]$ heißt **schwach Folgen-unterhalbstetig**, falls für jede Folge $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X für $k \to +\infty$ gilt

$$f(u) \leq \liminf_{k\to\infty} f(u_k).$$

Zum Beispiel ist $f(u) = \|u\|_X$ stets schwach Folgen-unterhalbstetig.

Lemma 3.11 (**Eigenschaften**) *Sei $F : X \to (-\infty, \infty]$.*
1. $\partial F(u)$ ist konvex und schwach*-Folgen-abgeschlossen.
2. F subdiff. in $u \in X \quad \Rightarrow \quad F$ ist schwach Folgen-unterhalbst. in u
3. F subdiff. in $u \in X \quad \Rightarrow \quad F$ hat ein globales Minimum in u gdw. $0 \in \partial F(u)$.
4. $\partial F : X \to 2^{X^*}$ ist monoton.

Beweis 1. $\partial F(u)$ konvex ist klar. Sei $(u_k^*) \subset \partial F(u)$ mit

$$u_k^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^* \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dann haben wir für $v \in X$

$$\langle u^*, v - u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k^*, v - u\rangle \leq F(v) - F(u).$$

Folglich, $u^* \in \partial F(u)$.

2.Sei $u^* \in \partial F(u)$. Sei $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X für $k \to +\infty$. Dann haben wir

$$F(u_k) \geq F(u) + \langle u^*, u_k - u\rangle \to F(u).$$

Somit ist $\liminf_{k\to\infty} F(u_k) \geq F(u)$.

3. $\Rightarrow \quad f(v) - f(u) \geq 0 = \langle 0, v - u\rangle$ für alle $v \in X$, also $0 \in \partial f(u)$.
Sei $0 \in \partial f(u)$. Dann $f(v) \geq f(u)$ für alle $v \in X$. Wegen $f \not\equiv +\infty$ erhält man $f(u) = \min_{v\in X} f(v)$.

4. Sei $u_i^* \in \partial F(u_i)$ $(i = 1, 2)$. Dann

$$F(u_2) - F(u_1) \geq \langle u_1^*, u_2 - u_1\rangle,$$
$$F(u_1) - F(u_2) \geq \langle u_2^*, u_1 - u_2\rangle.$$

Summiert man beide Gleichungen, so ergibt sich $0 \geq \langle u_1^* - u_2^*, u_2 - u_1\rangle$. ∎

Dualitätsabbildung

Definition 3.12 Wir definieren die Dualitätsabbildung $J : X \to 2^{X^*}$ durch

$$J(u) := \{u^* \in X^* \mid \|u^*\|_{X^*}^2 = \|u\|_X^2 = \langle u^*, u\rangle\}, \quad u \in X.$$

Bemerkung 3.13 1. Nach dem Satz von Hahn/Banach existiert ein $v^* \in X^*$ mit

$$\langle v^*, u\rangle = \|u\|_X, \quad \|v^*\|_{X^*} = 1.$$

Setzt man $u^* = \|u\|_X v^*$, so ergibt sich $u^* \in J(u)$. Also $J(u) \neq \emptyset$, also $D(J) = X$.

2. J ist monoton. In der Tat, haben wir für $u_i \in X$ und $u_i^* \in J(u_i)$

$$\begin{aligned}\langle u_1^* - u_2^*, u_1 - u_2\rangle &= \|u_1\|_X^2 + \|u_2\|_X^2 - \langle u_1^*, u_2\rangle - \langle u_2^*, u_1\rangle \\ &\geq (\|u_1\|_X - \|u_2\|_X)^2.\end{aligned}$$

3. Seien $u_i \in X$ und $u_i^* \in J(u_i)$, so dass

$$\langle u_1^* - u_2^*, u_1 - u_2\rangle = (\|u_1\|_X - \|u_2\|_X)^2 = 0,$$

so folgt $\|u_1\|_X = \|u_2\|_X = a^2 = \|u_1^*\|_{X^*} = \|u_2^*\|_{X^*}$. Auf der anderen Seite haben wir

$$2a^2 = \langle u_2^*, u_1\rangle + \langle u_1^*, u_2\rangle \leq \langle u_2^*, u_1\rangle + a^2.$$

Folglich gilt $a^2 \leq \langle u_2^*, u_1\rangle \leq a^2$, also

$$\langle u_2^*, u_1\rangle = \langle u_1^*, u_2\rangle = a^2.$$

Dies zeigt, dass $u_2^* \in J(u_1), u_1^* \in J(u_2)$.

Ist X uniform konvex, so besteht $J(u)$ aus nur einem Element. Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass in disem Fall J strikt konvex ist.

Lemma 3.14 *Es gilt* $J = \partial F$, *wobei* $F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2$.

Beweis Sei $u^* \in \partial F(u)$. Dann

$$\frac{1}{2}\|v\|_X^2 \geq \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \langle u^*, u - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Setzen $v = u + th$, mit $\|h\| = 1$ und $t > 0$. Dann

$$\langle u^*, th\rangle \leq \frac{t}{2}(\|u + th\| + \|u\|)(\|u + th\| - \|u\|) \leq \frac{t}{2}(\|u + th\| + \|u\|).$$

Dividieren durch t und dann $t \to 0^+$ liefert

$$\langle u^*, h\rangle \leq \|u\| \quad \Rightarrow \quad \|u^*\|_{X^*} \leq \|u\|.$$

Als nächstes setzen wir $v = tu \ (0 < t < 1)$. Dann folgt

$$(t-1)\langle u^*, u\rangle \leq \frac{t^2-1}{2}\|u\|^2 \quad \Rightarrow \quad \langle u^*, u\rangle \geq \|u\|^2.$$

Also ist $\|u\|^2 = \langle u^*, u\rangle \leq \|u\|_X \|u^*\|_{X^*}$. Folglich ist $u^* \in J(u)$.
Ist $u^* \in J(u)$ so haben wir für alle $v \in X$

$$\begin{aligned}\langle u^*, v-u\rangle &\leq \|u\|_X\|v\|_X - \|u\|_X^2 = -\frac{1}{2}(\|v\|-\|u\|)^2 + \frac{1}{2}\|v\|_X^2 - \frac{1}{2}\|u\|_X^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|_X^2 - \frac{1}{2}\|u\|_X^2.\end{aligned}$$

Somit ist $u^* \in \partial F(u)$. ∎

Bemerkung 3.15 Aus Lemma 3.14 folgt, dass $F(u) = \|u\|_X^2$ in jedem $u \in X$ subdifferenzierbar ist. Gemäß Lemma 3.11/2 ist $\|\cdot\|_X^2$ schwach Folgen-unterhalbstetig. Folglich ist auch $\|\cdot\|_X$ schwach Folgen-unterhalbstetig.

Satz 3.16 (**Rockafellar**) X *reflexiv. Sei* $f : X \to (-\infty, \infty]$ *konvex und schwach Folgen-unterhalbstetig auf* X *mit* $f \not\equiv +\infty$. *Dann ist* $\partial f : X \to 2^{X^*}$ *maximal monoton.*

Beweis Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$, so dass

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall\, (v, v^*) \in \partial f.$$

Wir definieren das Funktional

$$G(v) = \frac{1}{2}\|v\|_X^2 + f(u+v) - \langle u^*, v\rangle, \quad v \in X.$$

Da $f \not\equiv +\infty$ existiert ein $u_0 \in X$, so dass $f(u+u_0) \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(u+u_0+h) \geq f(u+u_0) - 1 \quad \forall\, h \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Sonst gäbe es eine Folge $h_k \to 0$ in X, mit $f(u+u_0+h_k) < f(u+u_0) - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da f schwach Folgen-unterhalbstetig ist, ergibt sich $f(u+u_0) \leq f(u+u_0) - 1$ ein Widerspruch.
Nun sei $h \in X$ mit $\|h\|_X = \delta$. Da f convex ist, haben wir

$$f(u+u_0+h) = f\Big((1-t)(u+u_0) + t\Big(u+u_0+\frac{h}{t}\Big)\Big) \leq (1-t)f(u-u_0) + tf\Big(u+u_0+\frac{h}{t}\Big).$$

Dies impliziert

$$tf\Big(u+u_0+\frac{h}{t}\Big) \geq f(u+u_0+h) - (1-t)f(u-u_0) \geq tf(u+u_0) - 1.$$

Folglich haben wir

$$f\Big(u+u_0+\frac{h}{t}\Big) \geq f(u+u_0) - \frac{\|h/t\|_X}{\delta} \quad \forall\, t \in (0,1].$$

Sei $v \in X$ mit $\|v\|_X \geq \delta$. Setzen $h = \frac{\delta}{\|v\|_X} v$ und $t = \frac{\delta}{\|v\|_X}$, so dass $v = \frac{h}{t}$. Hiemit ergibt sich

$$f(u + u_0 + v) \geq f(u + u_0) - \frac{\|v\|}{\delta}.$$

Dies zeigt, dass $G(v) \to +\infty$ für $\|v\| \to +\infty$, d.h. G ist koerziv.
Als nächstes zeigen wir, dass das Minimumproblem

$$G(w) = \min G(v)$$

eine Lösung in X hat. Wir setzen $\alpha = \inf G < +\infty$. Dann existiert eine Folge $(v_k) \subset X$, so dass $G(v_k) \to \alpha$. Da G koerziv ist, muss (v_k) beschränkt sein. Wegen der Reflexivität von X existiert ein $w \in X$ und eine Teilfolge (v_{k_j}), so dass $v_{k_j} \rightharpoonup w$ in X für $j \to +\infty$. Da f schwach Folgen-unterhalbstetig ist, ergibt sich

$$G(w) \leq \liminf_{j\to\infty} G(v_{k_j}) = \alpha.$$

Insbesondere zeigt dies dass $\alpha > -\infty$ und $\alpha \leq f(w) \leq \alpha$, also $f(w) = \min G(v)$. Aus Lemma 3.11/3 folgt, dass G in w subdifferenzierbar ist und dass $(w, 0) \in \partial G$. Mithilfe von Lemma 3.14 bekommt man

$$0 \in J(w) + \partial f(u + w) - \{u^*\}.$$

Somit existieren $w_1^* \in J(w), w_2^* \in \partial f(u + w)$, so dass

$$w_1^* = u^* - w_2^*.$$

Dies impliziert $(u + w, w_2^*) \in \partial f$ und

$$\|w\|_X^2 = \langle w_1^*, w\rangle = \langle u^* - w_2^*, w\rangle = -\langle u^* - w_2, u - (u + w)\rangle \leq 0.$$

Also ist $w = 0$ und $w_1^* = 0$. Dies zeigt $w_2^* = u_*$ und folglich ist $(u, u^*) \in \partial f$. ∎

Definition 3.17 Sei $A : D(A) \subset X \to X^*$. Ein Operator $B : X \to X^*$ heißt pseudomonoton bezüglich A, falls gilt:
Ist $(u_k) \subset D(A)$ mit

(i) $(A(u_k))$ ist in X^* beschränkt;

(ii) $u_k \rightharpoonup u$ in X für $k \to +\infty$, $\quad \limsup_{k\to\infty}\langle B(u_k), u_k - u\rangle \leq 0$,

Dann gilt $\langle B(u), u - v\rangle \leq \liminf_{k\to\infty}\langle B(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X$.

Satz 3.18 *Sei X separabler, reflexiver Banachraum. Sei $A : D(A) \subset X \to X^*$ maximal monoton, wobei $D(A)$ ein dichter Teilraum ist. Sei $B : X \to X^*$ pseudomonoton bezüglich A, koerziv und beschränkt. Dann ist $A + B : D(A) \to X^*$ surjektiv.*

Beweis Wir zeigen zunächst, dass $A+B$ koerziv ist. In der Tat, wegen der Monotonie von A bekommt man für $u \in D(A)$:

$$\frac{\langle A(u)+B(u),u\rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{\langle B(u),u\rangle}{\|u\|_X} + \frac{A(0),u\rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{\langle B(u),u\rangle}{\|u\|_X} - \|A(0)\|_{X^*}.$$

Da B koerziv ist, folgt die Behauptung.

Nun sei $u^* \in X^*$. Wir gehen wie im Beweis von Satz 2.5 vor. Da $D(A) \subset X$ dicht ist, existiert eine abzählbare Menge $\{a_1, a_2, \dots,\} \subset D(A)$ linarer unabhängiger Elemente, so dass $\overline{\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots\}} = X$. Wir definieren $X_n := \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. Da $D(A)$ linearer Raum ist, gilt $X_n \subset D(A)$. Wie im Beweis von Satz 2.5 sei $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to X_n$ ein Isomorphismus. Es existiert also eine Konstante $c_n > 1$, so dass

$$\frac{1}{c_n}|\xi| \leq \|\Phi_n(\xi)\|_X \leq c_n|\xi| \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir definieren $F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(F_n(\xi),\eta) = \langle A(\Phi_n(\xi)) + B(\Phi_n(\xi)) - u^*, \Phi_n(\eta)\rangle, \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^n.$$

Da A und B demistetig sind, ist F_n stetig. Da $A+B$ koerziv ist, existiert ein $r>0$, so dass

$$\langle A(u)+B(u),u\rangle \geq \|u^*\|_{X^*}\|u\|_X \quad \forall\, u \in D(A), \quad \|u\|_X \geq r.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|\eta| \geq c_n r$ gilt $\|\Phi_n(\eta)\|_X \geq c_n^{-1}c_n r = r$ und mithin

$$\begin{aligned}(F_n(\eta),\eta) &\geq \langle A(\Phi_n(\eta)) + B(\Phi_n(\eta))\rangle - \|u^*\|_{X^*}\|\Phi_n(\eta)\|_X \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Gemäß Satz 1.9 hat F_n eine Nullstelle $\xi_n \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen $u_n := \Phi_n(\xi_n)$. Dann ist u_n die n-te Galerkin-Näherung, das heißt

$$\langle A(u_n)+B(u_n),w\rangle = \langle u^*,w\rangle \quad \forall\, w \in X_n.$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.5 zeigt man, dass (u_n) in X beschränkt ist. Nach Voraussetzung ist auch $(B(u_n))$ in X^* beschränkt. Wir zeigen nun, dass $(A(u_n))$ in X^* beschränkt ist. Hierfür sei $v \in D(A)$ beliebig gewäht. Gemäß Lemma 2.2 ist A lokal beschränkt. Es gibt also ein $R > 0$, so dass

$$\|A(v)\|_{X^*} \leq C_0 \quad \forall\, v \in D(A), \quad \|v\|_X \leq R.$$

Mithilfe der Monotonie von A bekommt man

$$\begin{aligned}\langle A(u_n),v\rangle &= \langle A(u_n), v-u_n\rangle + \langle A(u_n),u_n\rangle \\ &\leq \langle A(v), v-u_n\rangle + \langle u^* - B(u_n), u_n\rangle \\ &\leq C_0(\|v\|_X + \|u_n\|_X) + (\|u^*\|_{X^*} + \|B(u_n)\|_{X^*})\|u_n\|_X \leq C_1.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|A(u_n)\|_{X^*} \leq C_1 R^{-1}$. Also ist $(A(u_n))$ in X^* beschränkt.

Aufgrund der Reflexivität von X und dem Satz von Banach-Alaoglu existiert eine Teilfolge (u_{n_j}) und Elemente $u \in X, v^*, w^* \in X^*$, so dass

$$\begin{aligned}
&u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad X \\
&A(u_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} v^*, \quad B(u_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} w^* \quad \text{in} \quad X^* \quad \text{für} \quad j \to +\infty.
\end{aligned}$$

Sei $v \in \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. Dann haben wir

$$\langle v^* + w^*, v = \lim_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}) + B(u_{n_j}), v\rangle = \langle u^*, v\rangle.$$

Da $\cup_{n=1}^{\infty} X_n$ dicht in X ist haben wir $v^* + w^* = u^*$. Hiermit ergibt sich

$$\lim_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}) + B(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u^*, u_{n_j}\rangle - \langle u^*, u\rangle = 0.$$

Dies liefert

$$\limsup_{j\to\infty} \langle B(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle = 0 - \limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle.$$

Auf der anderen Seite schließt man mithilfe der Monotonie von A, dass

$$\begin{aligned}
-\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle &= -\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}) - A(v), u_{n_j} - u\rangle \\
&\leq -\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}) - A(v), v - u\rangle \\
&= \langle A(v) - v^*, v - u\rangle
\end{aligned}$$

für alle $v \in D(A)$. Setzt man insbesondere $v = u_{n_k}$ und wendet $\limsup_{k\to\infty}$ auf beide Seiten an, so folgt

$$-\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle \leq \limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle.$$

Dies impliziert $-\limsup_{j\to\infty} \langle A(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle \leq 0$, also

$$\limsup_{j\to\infty} \langle B(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle \leq 0.$$

Nun ist B bezüglich A pseudomonoton. Somit haben wir für alle $v \in X$

$$\langle B(u), u - v\rangle \leq \liminf_{j\to\infty} \langle B(u_{n_j}), u_{n_j} - v\rangle.$$

Insbesondere gilt $\lim_{j\to\infty} \langle B(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle = 0$ also $\lim_{j\to\infty} \langle B(u_{n_j}), u_{n_j}\rangle = \langle w^*, u\rangle$. Folglich

$$\langle B(u), u - v\rangle \leq \langle w^*, u - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Dies impliziert $w^* = B(u)$.

Auf der anderen Seite haben wir

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\langle A(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle &= \lim_{j\to\infty}\langle A(u_{n_j})+B(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle - \lim_{j\to\infty}\langle B(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle \\ &= \langle u^*,u\rangle - \langle w^*,u\rangle = \langle v^*,u\rangle.\end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie von A findet man für jedes $w \in D(A)$

$$\langle v^* - A(w), u-w\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle A(u_{n_j}) - A(w), u_{n_j} - w\rangle \geq 0.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $u \in D(A)$ und $v^* = A(u)$. Also $u^* = A(u) + B(u)$. ∎

4. Evolutionsgleichungen

Räume vektorwertiger Funktionen.

Sei X ein Banachraum.

Definition 4.1 $f : (0,T) \to X$ heißt *einfach*, falls $f((0,T)) = \{x_1,\dots,x_N\}$ und $A_i = f^{-1}(\{x_i\}) \subset (0,T) \quad (i = 1,\dots,N)$ Lebesgue-messbar. In diesem Fall sind $A_i \quad (i = 1,\dots,N)$ paarweise disjunkt und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^{N} x_i \chi_{A_i}.$$

Eine Funktion $f : (0,T) \to X$ heißt *Bochner-messbar*, falls eine Folge (f_k) einfacher Funktionen existiert, mit $f_k(t) \to f(t)$ für fast alle $t \in (0,T)$.

Satz 4.2 (Pettis) *$f : (0,T) \to X$ ist Bochner-messbar, genau dann wenn ein separabler Teilraum $Y \subset X$ existiert, so dass*

$$f(t) \in Y \quad \text{f.f.a.} \quad t \in (0,T)$$

und für jedes $x^* \in X^*$ die Abbildung $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$ messbar ist. [3)]

Beweis $\Rightarrow$. Sei (f_k) eine Folge einfacher Funktionen, welche gegen f fast überall konvergiert. Dann existiert eine Nullmenge $N \subset (0,T)$, so dass

$$f_k(t) \to f(t) \quad \text{in} \quad X \quad \forall\, t \in (0,T)\setminus N \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dann ist die Menge $A = \cup_{k=1}^{\infty} f_k((0,T))$ höchstens abzählbar und $Y = \overline{\operatorname{span}(A)}^X$ ist ein separabler Teilraum von X. Aus der Konvergenzeigenschaft folgt $f(t) \in Y$ für alle $t \in (0,T) \setminus N$.

[3)] Eine Funktion $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls für alle $\alpha > 0$ die Menge $\{t \in (a,b) | \phi(t) > \alpha\}$ Lebesgue-messbar ist.

Als nächstes sei $x^* \in X^*$ beliebig. Aus der Stetigkeit von x^* folgt, dass $\varphi_k : t \mapsto \langle x^*, f_k(t)\rangle$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ messbar ist. Außerdem gilt $\varphi_k \to \langle x^*, f(\cdot)\rangle$ fast überall in $(0,T)$. Folglich ist $\langle x^*, f(\cdot)\rangle$ messbar.

$\Leftarrow$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass X separabel ist. Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ eine abzählbar dichte Teilmenge. Zunächst zeigen wir $M_\alpha = \{t \in (0,T) \,|\, \|f(t)\|_X > \alpha\}$ ist für jedes $\alpha > 0$ messbar.

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x^*_{k,n} \in X^*$ mit $\|x^*_{k,n}\|_{X^*} = 1$, so dass $\langle x^*_{k,n}, a_n\rangle \geq \|a_n\| - \frac{1}{k}$. Wir setzen

$$B_{k,n} = \{t \in (0,T) \,|\, \langle x^*_{k,n}, f(t)\rangle > \alpha\}, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Gemäß Voraussetzung ist $B_{k,n}$ in $(0,T)$ meßbar, also auch die Menge $B = \cup_{k=1}^\infty \cup_{n=1}^\infty B_{k,n}$. Wir zeigen nun $M_\alpha = B$. Wie man leicht sieht folgt aus $\|f(t)\| \leq \alpha$, dass $t \notin B_{k,n}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$, also $t \notin B$. Folglich ist $B \subset M_\alpha$. Nun sei $t \in M_\alpha$. Dann existiert ein $a_n \in A$, so dass $\|f(t) - a_n\|_X \leq \frac{1}{4}(\|f(t)\|_X - \alpha)$. Wählen $k \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{4}(\|f(t)\|_X - \alpha)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\langle x^*_{k,n}, f(t)\rangle = \langle x^*_{k,n}, a_n\rangle + \langle x^*_{k,n}, f(t) - a_n\rangle &\geq \|a_n\|_X - \frac{1}{k} - \|f(t) - a_n\|_X \\ &\geq \|f(t)\|_X - \frac{1}{k} - 2\|f(t) - a_n\|_X > \|f(t)\| - (\|f(t)\|_X - \alpha) = \alpha.\end{aligned}$$

Somit ist $t \in B$.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren rekursiv $E_{k,n}$ durch

$$\begin{cases} E_{k,1} = \left\{t \in (0,T) \,\middle|\, \|f(t) - a_1\|_X \leq \frac{1}{k}\right\}, \\ E_{k,n} = \left\{t \in (0,T) \setminus \cup_{i=1}^{n-1} E_{k,i} \,\middle|\, \|f(t) - a_n\|_X \leq \frac{1}{k}\right\}. \end{cases}$$

Dann sind $E_{k,n} \subset (0,T)$ p.w. disjunkte messbare Mengen. Aus der Dichtheit von A, folgt $\cup_{n=1}^\infty E_{k,n} = (0,T)$. Es existiert also ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|(0,T) \setminus \bigcup_{n=1}^{N_k} E_{k,n}\right| \leq 2^{-k}.$$

Wir setzen $f_k = \sum\limits_{n=1}^{N_k} a_n \chi_{E_{k,n}}$ und zeigen, dass $f_k(t) \to f(t)$ in X für $k \to +\infty$ für fast alle $t \in (0,T)$.

Wir setzen

$$N = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=m}^\infty \Big((0,T) \setminus \bigcup_{n=1}^{N_k} E_{k,n}\Big).$$

Dann ist N eine Nullmenge. Nun sei $t \in (0,T) \setminus N$. Das heißt, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq m$ existiert ein $n \in \{1, \ldots, N_k\}$ mit $t \in E_{k,n}$, also

$$\|f_k(t) - f(t)\|_X = \|a_n - f(t)\| \leq \frac{1}{k}.$$

Dies zeigt, dass $f_k(t) \to f(t)$ in X für $k \to +\infty$. Somit ist f Bochner-messbar. ∎

Bochner-Integral

Ist $f = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ eine einfache Funktion von (a,b) in X. Dann setzen wir

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{N} a_i |A_i|.$$

Definition 4.3 Sei $f : (a,b) \to X$ Bochner-messbar. f heißt *Bochner-integrierbar*, falls eine Folge (f_k) einfacher Funktionen existiert mit

$$\int\limits_a^b \|f_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

In diesem Fall existiert genau ein Element $\int\limits_a^b f(t)dt \in X$ (Bochner-Integral), so dass

$$\int\limits_a^b f_k(t)dt \to \int\limits_a^b f(t)dt \quad \text{in} \quad X \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Existenz: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \int\limits_a^b f_k(t)dt - \int\limits_a^b f_l(t)dt \right\|_X \leq \int\limits_a^b \|f_k - f(t)(t)\|_X dt + \int\limits_a^b \|f_l - f(t)(t)\|_X dt$$

$\to 0$ für $k, l \to +\infty$. Folglich ist $\left(\int\limits_a^b f_k(t)dt \right)$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert.

Eindeutigkeit: Ist (g_k) eine weitere Folge einfacher Funktionen mit

$$\int\limits_a^b \|g_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dann hat die Mischfolge $\{f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\}$ die gleiche Eigenschaft. Ihre Integrale bilden ebenfalls eine Cauchy-Folge in X. Folglich konvergiert $\int\limits_a^b g_k(t)dt$ ebenfalls gegen $\int\limits_a^b f(t)dt$. ■

Bemerkung 4.4 Ist $f : (a,b) \to X$ Bochner-integrierbar, so ist für jede Lebesgue-messbare Menge A die Funktion $f\chi_A$ ebenfalls Bochner-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_A f(t)dt := \int\limits_a^b f(t)\chi_A(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f_k(t)\chi_A(t)dt.$$

In der Tat, mithilfe der Dreiecksungleichung findet man

$$\int_a^b \|f_k(t)\chi_A(t) - f(t)\chi_A(t)\|_X dt \leq \int_a^b \|f_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0$$

für $k \to +\infty$. Also ist $f\chi_A$ ebenfalls Bochner-integriebar. ■

Satz 4.5 *Sei $f : (a,b) \to X$ Bochner-integrierbar. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt.$$

Beweis Sei (f_k) Folge einfacher Funktionen mit

$$\int_a^b \|f_k(t) - f(t)\|_X dt \to 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f_k(t)dt \to \int_a^b f(t)dt \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \int_a^b f_k(t)dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f_k(t)\|_X dt \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_X &\leq \int_a^b \|f_k(t)\|_X dt + \left\| \int_a^b f(t) - f_k(t)dt \right\|_X \\
&\leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt + \int_a^b \|f(t) - f_k(t)\|_X dt + \left\| \int_a^b f(t) - f_k(t)dt \right\|_X \\
&\to \int_a^b \|f(t)\|_X dt \quad \text{für} \quad k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Satz 4.6 *Sei $f : (a,b) \to X$ Bochner-messbar. f ist Bochner-integrierbar, genau dann wenn*

$$\int_a^b \|f(t)\|_X dt < +\infty.$$

Beweis $\Rightarrow$: Folgt sofort aus der Dreiecksungleichung

$$\int_a^b \|f(t)\|_X dt \leq \int_a^b \|f_k(t)\|_X dt + \int_a^b \|f(t) - f_k(t)\|_X dt < +\infty.$$

$\Leftarrow$: Da f Bochner-messbar ist, existiert eine Folge einfacher Funktionen (f_k), so dass

$$f_k(t) \to f(t) \quad \text{in} \quad X \quad \text{f.f.a} \quad t \in (a,b) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Menge $A_{n,k} = \{t \in (a,b) \,|\, \exists l \geq k : \|f_l(t) - f(t)\|_X > \frac{1}{n}\}$. Nach Voraussetzung ist $\lim_{k\to\infty} |A_{n,k}| = 0$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$, so dass $|A_{n,k_n}| \leq \frac{1}{n}$. Wir definieren

$$g_n = f_{k_n} \chi_{A^c_{n,k_n}}.$$

Dann haben wir

$$\int_a^b \|f(t) - g_n(t)\|_X dt \leq \frac{1}{n}(b-a) + \int_{A_{n,k_n}} \|f(t)\|_X dt \to 0 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Folglich ist f Bochner-integrierbar. ■

Lemma 4.7 *Ist $f : (a,b) \to X$ Bochner-integrierbar. Dann ist für jedes $x^* \in X^*$ die Funktion $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b \langle x^*, f(t)\rangle dt = \left\langle x^*, \int_a^b f(t) dt \right\rangle.$$

Beweis Sei (f_k) eine Folge einfacher Funktionen mit

$$\int_a^b \|f(t) - f_k(t)\|_X dt \to 0 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dies impliziert

$$\left| \int_a^b \langle x^*, f(t)\rangle dt - \int_a^b \langle x^*, f_k(t)\rangle dt \right| \leq \|x^*\|_{X^*} \int_a^b \|f(t) - f_k(t)\|_X dt \to 0$$

für $k \to +\infty$. Dann haben wir

$$\left\langle x^*, \int_a^b f(t) dt \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle x^*, \int_a^b f_k(t) dt \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \langle x^*, f_k(t)\rangle dt = \int_a^b \langle x^*, f(t)\rangle dt.$$

■

Lemma 4.8 *Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.*

(i) Ist $f : (a,b) \to X$ Bochner-messbar, so ist $Tf : (a,b) \to Y$ Bochner-messbar, wobei

$$(Tf)(t) = T(f(t)), \quad t \in (a,b).$$

(ii) Ist f Bochner-integrierbar, so ist $Tf : (a,b) \to Y$ Bochner-integriebar und es gilt

$$\int_a^b Tf(t)dt = T\Big(\int_a^b f(t)dt\Big).$$

Beweis (i) Sei $y^* \in Y^*$. Wir setzen $x^* = T^* y^* \in X^*$, d.h.

$$\langle x^*, f\rangle = \langle y^*, Tf\rangle, \quad x \in X.$$

Aus dem Satz von Pettis folgt $\langle y^*, Tf\rangle = \langle x^*, f\rangle$ ist Lebesgue-messbar. Außerdem ist $f((a,b))$ separabel. Folglich ist $Tf((a,b))$ separabel. Nach dem Satz von Pettis ist Tf Bochner-messbar.

(ii) Da T beschränkt ist, haben wir

$$\int_a^b \|Tf(t)\|_Y dt \le \|T\| \int_a^b \|f(t)\|_X dt < +\infty.$$

Gemäß Satz 4.5 ist Tf Bochner-integrierbar. Ferner haben wir für $y^* \in Y^*$ unter Verwendung von Lemma 4.6

$$\begin{aligned}\Big\langle y^*, \int_a^b Tf(t)dt\Big\rangle &= \int_a^b \langle T^*y^*, f(t)\rangle dt = \Big\langle T^*y^*, \int_a^b f(t)dt\Big\rangle \\ &= \Big\langle y^*, T\Big(\int_a^b f(t)dt\Big)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ∎

Lemma 4.9 *Sei $f : (a,b) \to X$ Bochner-integrierar. Dann existiert ein $t_0 \in (a,b)$, so dass*

$$\|f(t_0)\|_X \le \frac{1}{b-a} \int_a^b \|f(t)\|_X dt.$$

Beweis Wir nehmen an, die Aussage ist falsch. Dann wäre $\|f(s)\|_X > \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \|f(t)\|_X dt$ für alle $s \in (a,b)$. Dies impliziert jedoch, dass $\|f(s)\|_X = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \|f(t)\|_X dt$ f.f.a. $s \in (a,b)$, was aber ein Widerspruch ist. ∎

Notation $L^p(a,b;X)$ bezeichne den Raum aller Bochner-messbaren Funktionen $f : (a,b) \to X$, so dass

$$\|f\|^p_{L^p(a,b;X)} = \int_a^b \|f(t)\|^p_X dt < +\infty \qquad \text{falls} \quad 1 \le p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X < +\infty \qquad \text{falls} \quad p = +\infty$$

Satz 4.10 *$L^p(a,b;X)$ ist ein Banachraum.*

Beweis Wir beweisen die Aussage nur für $1 \le p < \infty$. Den Fall $p = \infty$ überlassen wir dem Leser.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $L^p(a,b;X)$. Wir wählen eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p(a,b;X)} \le k^{-4}.$$

Wir definieren

$$A_k = \Big\{ t \in (a,b) \,|\, \|f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)\|_X > k^{-2} \Big\}.$$

Dann folgt

$$k^{-2p}|A_k| \le \int\limits_a^b \|f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)\|_X^p dt \le k^{-4p}.$$

Folglich gilt $|A_k| \le k^{-2p}$. Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2p} < +\infty$ haben wir

$$\lim_{m\to\infty} | \cup_{k=m}^{\infty} A_k| = 0.$$

Somit ist $N = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=m}^{\infty} A_k$ eine Nullmenge. Sei $t \in (a,b) \setminus N$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$t \in (a,b) \setminus A_k \quad \forall\, k \ge m \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)\|_X \le k^{-2} \quad \forall\, k \ge m.$$

Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2} < +\infty$ ist $(f_{n_k}(t))$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge in X. Es existiert also eine Bochner-messbare Funktion $f : (a,b) \to X$, so dass

$$f_{n_k}(t) \to f(t) \quad \text{in} \quad X \quad \text{f.f.a. } t \in (a,b) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Wir setzen $g_k(t) := \|f_{n_k}(t) - f(t)\|_X$. Mithilfe der Dreiecksungleichung bekommt man

$$|g_l(t) - g_k(t)| \le \Big| \|f_{n_l}(t) - f(t)\|_X - \|f_{n_k}(t) - f(t)\|_X \Big| \le \|f_{n_l}(t) - f_{n_k}(t)\|_X$$

for a.a. $t \in (a,b)$. Also ist (g_k) eine Cauchy-Folge in $L^p((a,b))$ mit $g_k(t) \to 0$ f.f.a. $t \in (a,b)$ für $k \to +\infty$. Somit haben wir

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^p(a,b;X)} = \|g_k\|_{L^p((a,b))} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Hieraus folgert man $f_n \to f$ in $L^p(a,b;X)$ für $n \to +\infty$. ■

Das Steklov-Mittel Sei $f \in L^1(a,b;X)$. Wir setzen f auf $\mathbb{R}$ durch 0 fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit f. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir das Steklov-Mittel

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_t^{t+\lambda} f(s)ds, \quad t \in (a,b).$$

Falls $\lambda < 0$, gilt die Konvention

$$\int_{t}^{t+\lambda} f(s)ds = -\int_{t+\lambda}^{t} f(s)ds.$$

Lemma 4.11 (Eigenschaften) *1. Für $f \in L^p(a,b;X)$ haben wir $f_\lambda \in L^p(a,b;X)$ und es gilt*

$$\|f_\lambda\|_{L^p(a,b;X)} \leq \|f\|_{L^p(a,b;X)} \quad \forall\, |\lambda| < b-a,$$
$$f_\lambda \to f \quad \text{in} \quad L^p(a,b;X) \quad \text{für} \quad \lambda \to 0.$$

2. $\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = \frac{f(t+\lambda)-f(t)}{\lambda}$ für alle $f \in L^1(a,b;X)$.

3. Sei $f \in L^1(a,b;X)$. Dann

$$f_\lambda(t) \to f(t) \quad \text{in} \quad X \quad \text{für} \quad \lambda \to 0 \quad \text{f.f.a. } t \in (a,b).$$

Der Operator der Zeitableitung

Definition 4.12 Sei $u \in L^p(a,b;X)$. Sei Y ein Banachraum mit $X \hookrightarrow Y$. Eine Funktion $v \in L^1(a,b;Y)$ heißt schwache Zeitableitung von u in Y, falls

$$\int_a^b v(t)\phi(t)dt = -\int_a^b u(t)\phi'(t)dt \quad \text{in} \quad Y \quad \forall\, \phi \in C_0^1((a,b)).$$

Dann ist v eindeutig und wird mit v' bezeichnet.

Satz 4.13 *Sei $u \in L^1(a,b;X)$ mit schwacher Zeitableitung $u' \in L^1(a,b;Y)$. Dann existiert ein Vertreter $\widetilde{u} \in C([a,b];Y)$ ($\widetilde{u}(t) = u(t)$ f.f.a. $t \in (a,b)$) und es gilt*

$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau \quad \text{in} \quad Y \quad \forall\, s,t \in [a,b].$$

Beweis Gemäß Lemma 4.11/3. existiert eine Nullmenge $N \subset (a,b)$, so dass $u_\lambda(t) \to u(t)$ für alle $t \in (a,b) \setminus N$. Seien $a < s < t < b$ mit $s,t \notin N$. Aus der Definition des Steklov-Mittels folgt

$$u'_\lambda = \frac{u(\cdot+\lambda)-u}{\lambda} \quad \text{in} \quad (a, b-\lambda)$$

Dann haben wir

$$\int_a^b (u')_\lambda \phi d\tau = -\int_a^{b-\lambda} u(\phi_{-\lambda})'d\tau = \int_a^b (u_\lambda)'\phi d\tau$$

für alle $\phi \in C_0^1((a, b-\lambda))$. Folglich haben wir für $0 < \lambda < b-t$

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(s) + \int_s^t (u')_\lambda(\tau) d\tau \quad \text{in} \quad Y \quad \forall\, s, t \in [a, b].$$

Nach $\lambda \to 0^+$ erhalten wir unter Verwendung von Lemma 4.11/1.

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau \quad \text{in} \quad Y \quad \forall\, s, t \in (a, b) \setminus N.$$

Sei $t_0 \in (a, b) \setminus N$ beliebig. Wir definieren

$$\widetilde{u}(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Dann hat $\widetilde{u}$ die geforderten Eigenschaften. ■

Bezeichnung 1. Falls $u \in L^1(a, b; X)$ mit $u' \in L^1(a, b; Y)$ so sei O.B.d.A. $\widetilde{u} = u \in C([a, b]; Y)$.
2. Mit $W_q^p(a, b; X, Y) \quad (1 \le p \le +\infty; 1 \le q < +\infty)$ bezeichnen wir die Menge aller $u \in L^p(a, b; X)$, so dass ein $u' \in L^q(a, b; Y)$. Nach Satz 4.13 haben wir

$$W_q^p(a, b; X, Y) \hookrightarrow C([a, b]; Y).$$

Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum mit der Norm $|\cdot| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$, so dass $X \hookrightarrow H$ dicht. Dann heißt $X \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow X^*$ ein Gelfand-Tripel. Insbesondere haben wir die stetige Einbettung $i : X \to X^*$, wobei für $x \in X$ gilt

$$\langle i(x), \xi \rangle := (x, \xi) \le |x|\,|\xi| \le c|x|\,\|\xi\|_X \quad \forall\, \xi \in X.$$

Mit $W^p(a, b; X) \quad (1 \le p < +\infty)$ bezeichnen wir die Menge aller $u \in L^p(a, b; X)$ mit $u' \in L^{p'}(a, b; X^*) \cong (L^p(a, b; X))^*$. Dann haben wir

Satz 4.14 $W^p(a, b; X) \hookrightarrow C([a, b]; H)$.

Beweis Seien $a \le s < t < b$. Für $0 < \lambda < b-t$ haben wir $u_\lambda \in C([s, t]; H), u'_\lambda \in L^{p'}(s, t; H)$. Dann folgt unter Verwendung der Produktregel für das Skalarprodukt

$$\frac{d}{dt}(u_\lambda, u_\mu) = (u'_\lambda, u_\mu) + (u'_\mu, u_\lambda) \quad \forall\, 0 < \lambda, \mu < b-t.$$

Mithilfe partieller Integration findet man

$$(*) \qquad \begin{aligned} (u_\lambda(t), u_\mu(t)) - (u_\mu(s), u_\lambda(s)) &= \int_s^t (u'_\lambda(\tau), u_\mu(\tau)) + (u'_\mu(\tau), u_\lambda(\tau)) d\tau \\ &= \int_s^t \langle u'_\lambda(\tau), u_\mu(\tau) \rangle + \langle u'_\mu(\tau), u_\lambda(\tau) \rangle d\tau \\ &\le 2\|u'\|_{L^{p'}(a,b;X^*)} \|u\|_{L^p(a,b;X)}. \end{aligned}$$

Sei $t \in (a,b)$, so dass $u_\lambda(t) \to u(t)$ in X für $\lambda \to 0$. Mit $\mu = \lambda$ folgt aus der obigen Identität, dass $(u_\lambda(s))$ in H beschränkt ist. Da H reflexiv ist, existiert eine Folge $\lambda_j \to 0$ für $j \to +\infty$, und ein $\xi \in H$, so dass

$$u_{\lambda_j}(s) \rightharpoonup \xi \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Auf der anderen Seite haben wir jedoch $u \in C([a,b]; X^*)$. Somit ist $\xi = u(s)$ und

$$u_\lambda(s) \rightharpoonup u(s) \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad \lambda \to 0.$$

Sei $0 < \mu < b - t$ fixiert. Aus $(*)$ mit $\lambda \to 0$ folgt

$$(u(t), u_\mu(t)) + (u_\mu(s), u(s)) = \int_s^t \langle u'(\tau), u_\mu(\tau)\rangle + \langle u_\mu'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau$$

Hieraus folgt mit $\mu \to 0$

$$|u(t)|^2 - |u(s)|^2 = 2 \int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau \quad \forall\, a \le s < b.$$

Insbesondere haben wir

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;H)} \le 2\|u\|_{L^p(a,b;X)}\|u'\|_{L^{p'}(a,b;X^*)}.$$

Fixiere $t \in [a,b]$. Sei (t_k) Folge in (a,b) mit $t_k \to t$. Da $(u(t_k))$ in H beschränkt ist, existiert eine Teilfolge (t_{k_j}) und ein $\eta \in H$, so dass

$$u(t_{k_j}) \rightharpoonup \eta \quad \text{in} \quad H \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wegen $u \in C([a,b]; X^*)$ folgt $\eta = u(t)$. Also konvergiert $u(t_k)$ gegen $u(t)$ schwach in H. Auf der andern Seite haben wir

$$|u(t_k)|^2 = |u(t)|^2 + \int_t^{t_k} \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau \to |u(t)|^2 \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Folglich konvergiert $u(t_k)$ gegen $u(t)$ in H für $k \to +\infty$. ■

Folgerung 4.15 *Seien $u, v \in W^p(a,b;X)$. Dann haben wir*

$$\int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau = (u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) \quad \forall\, s,t \in [a,b].$$

Beweis Seien $a \le s < t < b$. Für $0 < \lambda < b - t$ erhält man wie oben

$$\int_s^t \langle u_\lambda'(\tau), v_\lambda(\tau)\rangle + \langle v_\lambda'(\tau), u_\lambda(\tau)\rangle d\tau = (u_\lambda(t), v_\lambda(t)) - (u_\lambda(s), v_\lambda(s)) \quad \forall\, s,t \in [a,b].$$

Wegen $u, v \in C([a,b];H)$ folgt die Behauptung nach $\lambda \to 0^+$ unter Verwendung von Lemma 4.11. ■

Satz 4.16 *Wir definieren den Operator der Zeitableitung* $L : D(L) \subset L^p(a,b;X) \to L^{p'}(a,b;X^*)$ *durch*

$$\begin{cases} D(L) = \{u \in W^p(a,b;X) \,|\, u(a) = 0\} \\ Lu = u'. \end{cases}$$

Dann ist L maximal monoton.

Beweis *1. L ist monoton.* Aus Folg. 4.15 mit $u = v$ folgt

$$\langle Lu, u\rangle = \int_a^b \langle u'(t), u(t)\rangle dt = \frac{1}{2}|u(b)|^2 \geq 0 \quad \forall\, u \in D(L).$$

Wegen der Linearität von L ist L monoton.

2. L ist maximal monoton. Seien $u \in L^p(a,b;X)$ und $f \in L^{p'}(a,b;X^*)$, so dass

$$\langle u - Lv, f - v\rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in D(L).$$

Sei $v \in C_0^1(a,b;X)$. Sei $\gamma > 0$. Dann ist $\gamma v \in D(L)$ und unter Verwendung von Folg. 4.15 folgt

$$\langle f - L(\gamma v), u - \gamma v\rangle \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma\langle Lv, u\rangle \leq \langle f, u\rangle - \gamma\langle f, v\rangle.$$

Teilt man beide Seiten durch γ so folgt nach $\gamma \to +\infty$

$$\langle Lv, u\rangle \leq -\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{L^{p'}(a,b;X^*)}\|v\|_{L^p(a,b;X)} \quad \forall\, v \in C_c^1(a,b;X).$$

Aus der obigen Identität mit $v = \xi\eta$, wobei $\xi \in X$ und $\eta \in C_0^1(a,b)$ schließt man

$$\left\langle \int_a^b u(t)\eta'(t)dt, \xi \right\rangle = -\int_a^b \langle f(t), \eta(t)\xi\rangle dt = -\left\langle \int_a^b f(t)\eta(t)dt, \xi \right\rangle$$

Dies zeigt, dass $f = u' \in L^{p'}(a,b;X^*)$, also $u \in W^p(a,b;X)$. Bleibt noch zu zeigen, dass $u(a) = 0$. Hiefür wählen wir $\eta \in C^1(a,b)$ mit $\eta(a) = 0$ und $\eta(1) = 1$. Dann ist $v = u\eta \in D(L)$. Mithilfe von Folg. 4.15 bekommt man

$$0 \leq \langle u' - v', u - v\rangle = \frac{1}{2}|u(b) - v(b)|^2 - \frac{1}{2}|u(a) - v(a)|^2 = -\frac{1}{2}|u(a)|^2.$$

Dies zeigt, dass $u \in D(L)$ und $Lu = f$. ■