TOPOLOGIE FEUILLETÉE ET CONSERVATIVITÉ DES RÉALISATIONS CLASSIQUES EN CARACTÉRISTIQUE NULLE

par

Joseph Ayoub

Table des matières

1. La $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariance

Dans cette section, nous introduisons le notion de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariance qui jouera un rôle fondamental dans notre approche de la conjecture de conservativité.

1.1. Une méthode pour montrer qu'un spectre est un Ω-spectre. —

La notion de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariance permet de faire fonctionner une méthode pour montrer qu'un certain type de T-spectres sur les feuilletages sont des Ω_T-spectres. Le but de cette sous-section est d'expliquer cette méthode.

Notation 1.1. — On fixe une fois pour toute un foncteur « remplacement injectivement ψ-*ft*-fibrant » pseudo-monoïdal $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(-)$ dans la catégorie des complexes de préfaisceaux sur SmFol/k. On note $\tau^{\leqslant 1}\Omega$ le complexe de de Rham intelligemment tronqué, i.e., le complexe $[\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}]$ où $\mathcal{O}$ est placé en degré zéro. Par le lemme de Poincaré feuilleté, le morphisme évident $\mathcal{O}^\delta \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$ est une équivalence ψ-*ft*-locale. Ainsi, le morphisme $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^\delta) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux injectivement fibrants ; il admet donc un inverse à homotopie près et on en fixe un

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^\delta). \tag{1}$$

Mots clefs. — Algèbre différentielle, feuilletage, topologie feuilletée, théorie de Galois différentielle supérieure, type d'homotopie feuilletée.

L'auteur a bénéficié du soutien partiel du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 2000201-124737/1.

On supposera que le foncteur $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}$ préserve les complexes concentrés en degrés cohomologiques positifs. Il s'ensuit que le morphisme (1) induit l'identité sur le sous-préfaisceau $\mathcal{O}^{\delta}$. □

Définition 1.2. — *Un* $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule *est un complexe de préfaisceaux de* $\mathcal{O}^{\delta}$*-modules* M *sur* SmFol/k *muni d'un morphisme* $\tau^{\leqslant 1}\Omega \otimes M \longrightarrow M$ *rendant commutatif le triangle*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\delta} \otimes M \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \tau^{\leqslant 1}\Omega \otimes M \arrow[r] & M. \end{tikzcd}$$

On définit de même la notion de $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$-prémodule.

Exemple 1.3. — Soit M un complexe de préfaisceaux de $\mathcal{O}^{\delta}$-modules sur SmFol/k. On munit $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ d'une structure de $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$-prémodule en prenant la composition de

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \xrightarrow{(1)} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\delta}) \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\delta} \otimes M) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M). \tag{2}$$

En particulier, $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est aussi un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule. □

Notation 1.4. — On dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\acute{e}t}(\cdots)}\left(\frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}}, \mathcal{O}^{\times}[1]\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\acute{e}t}(\cdots)}\left(\frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{\infty \otimes \mathbb{Z}}, \mathcal{O}^{\times}[1]\right) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k, \infty) \tag{3}$$

où $\mathbf{Ho}_{\acute{e}t}(\cdots) = \mathbf{Ho}_{\acute{e}t}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \mathbb{Z})))$ et $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k, \infty)$ est le groupe de Picard relatif des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$-modules inversibles munis d'une trivialisation au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}^1_k$. On note $\eta \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k, \infty)$ la classe de l'idéal $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ des fonctions qui s'annulent en $1 \in \mathbb{P}^1_k$ muni de la trivialisation évidente au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}^1_k$. Grâce aux isomorphismes (3), la classe η correspond à un morphisme

$$\overline{\eta} : \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}[1] \tag{4}$$

dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\acute{e}t}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \mathbb{Z})))$ qui induit un morphisme du même type dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\psi\text{-}ft}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \mathbb{Z})))$.

On choisit un morphisme

$$\overline{\eta} : \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times})[1] \tag{5}$$

qui représente (4) dans $\mathbf{Ho}_{\psi\text{-}ft}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \mathbb{Z})))$. On définit alors

$$\overline{\alpha} : \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)[2] \tag{6}$$

comme étant la composition de (5) avec le morphisme $\mathrm{d}\log : \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times})[1] \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)[2]$. □

Rappelons que $T = (\mathbb{P}^1_k, \infty) \otimes \mathbb{Z}$. On dispose d'un morphisme de préfaisceaux

$$T \longrightarrow \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}}$$

(qui est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \acute{e}t)$-locale). En composant avec (5) et (6), on obtient deux morphismes

$$\eta : T \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times})[1] \qquad \text{et} \qquad \alpha : T \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)[2]. \tag{7}$$

Construction 1.5. — Soit M un complexe de préfaisceaux de $\mathcal{O}^{\delta}$-modules. On définit un T-spectre $\mathbf{M}$ sur SmFol/k de la manière suivante.

– En niveau $n \in \mathbb{N}$, le T-spectre $\mathbf{M}$ est donné par $\mathbf{M}_n = \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2n]$.
– Le morphisme d'assemblage $\gamma_n : T \otimes \mathbf{M}_n \longrightarrow \mathbf{M}_{n+1}$ est donné, à un shift près, par la composition de

$$\gamma : T \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2] \xrightarrow{(2)} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]. \tag{8}$$

On dira que $\mathbf{M}$ est le T-spectre associé au $\mathcal{O}^{\delta}$-module M. □

Afin d'énoncé le théorème principal de cette sous-section, nous introduisons la notion de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariance.

Définition 1.6. — *Soit F un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* SmFol/k.

(a) On dit que F est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariant *si le morphisme*

$$F(X/\mathcal{F}) \longrightarrow F(\mathbb{P}^{1,\delta} \times_k (X/\mathcal{F}))$$

est un quasi-isomorphisme pour tout k-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$.

(b) On dit que F est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local *(relativement à une topologie τ) si un remplacement τ-fibrant de F est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariant.*

(c) Enfin, on dit que F est $(\mathbb{P}^{1,\delta},\tau)$-fibrant *(resp.* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant*) s'il est τ-fibrant (resp. $(\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant) et $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariant.*

Théorème 1.7. — *Soit M un complexe de préfaisceaux de $\mathcal{O}^{\delta}$-modules et considérons le T-spectre $\mathbf{M} = \{\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ associé à M. Supposons que M est $\mathbb{A}^1$-local et $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local (ce qui revient au même de dire que $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant). Alors, le T-spectre $\mathbf{M}$ est stablement $(\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant.*

Le reste de la sous-section est consacré à la preuve du Théorème 1.7. L'étape principale est la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 1.8. — *Gardons les hypothèses et les notations du Théorème 1.7. Alors, le morphisme*

$$\gamma' : \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\infty), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]),$$

obtenu par adjonction de (8)*, admet une rétraction canonique dans* $\mathbf{Ho}_{\psi\text{-}ft}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)))$.

On note $\widetilde{T} = (\mathbb{P}^1_k,\{0,\infty\}) \otimes \mathbb{Z}$. On dispose d'un morphisme de préfaisceaux

$$\widetilde{T} \longrightarrow \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}}.$$

En composant avec (5) et (6), on obtient deux morphismes

$$\tilde{\eta} : \widetilde{T} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times})[1] \qquad \text{et} \qquad \tilde{\alpha} : \widetilde{T} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)[2]. \tag{9}$$

On note

$$\tilde{\gamma} : \widetilde{T} \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2] \tag{10}$$

la composition de

$$\widetilde{T} \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2] \xrightarrow{(2)} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2].$$

Proposition 1.9. — *Gardons les hypothèses et les notations du Théorème 1.7. Alors, le morphisme*

$$\tilde{\gamma}' : \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\{0,\infty\}), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]),$$

obtenu par adjonction de (10)*, admet une rétraction canonique dans* $\mathbf{Ho}_{\psi\text{-}ft}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)))$.

Lemme 1.10. — *Les Propositions 1.8 et 1.9 sont équivalentes.*

Démonstration. — Par construction, on dispose d'un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \arrow[r, "\tilde{\gamma}'"] \arrow[dr, "\gamma'"'] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\{0,\infty\}), \mathrm{R}_{\tau}(M)) \arrow[d] \\ & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\infty), \mathrm{R}_{\tau}(M)), \end{tikzcd}$$

ce qui montre que la Proposition 1.8 entraîne la Proposition 1.9. Pour la réciproque, posons

$$\overline{T} = \frac{\mathbb{P}^1_k \otimes \mathbb{Z}}{(\mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}) \otimes \mathbb{Z}}.$$

On dispose d'un morphisme

$$\overline{\gamma} : \overline{T} \otimes \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]$$

construit de la même manière que (8) et (10). De plus, le morphisme

$$\overline{\gamma}' : \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]),$$

déduit de $\overline{\gamma}$ par adjonction, s'insère dans un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \arrow[r, "\overline{\gamma}'"] \arrow[dr, "\widetilde{\gamma}'"'] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[d] \\ & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \{0, \infty\}), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)). \end{tikzcd}$$

Ainsi, la Proposition 1.9 entraîne que $\overline{\gamma}'$ admet une rétraction. Or, étant donné que $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrant, le morphisme évident

$$\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{1\}), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \infty), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))$$

est un quasi-isomorphisme. De plus, modulo cette identification, les morphismes γ' et $\overline{\gamma}'$ coïncident. Ceci permet de conclure. ∎

Pour les besoins de la preuve de la Proposition 1.9 nous introduisons les k-feuilletages suivants.

Notation 1.11. — On note $\mathbb{X}/\mathcal{E}$ le k-feuilletage tel que $\mathbb{X} = \mathrm{Spec}(k[t, e, e^{-1}])$ et

$$\Omega_{\mathbb{X}/\mathcal{E}} = \frac{\Omega_{\mathbb{X}/k}}{(e^{-1} \cdot \mathrm{d}e - \mathrm{d}t)}.$$

Le morphisme évident

$$t : \mathbb{X}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k/k$$

est différentiellement étale ce qui permet de munir le k-schéma $\mathbb{X}$ d'une structure de ∂-schéma telle que $\partial(t) = 1$ et $\partial(e) = e$. □

Notation 1.12. — On note $\mathbb{X}^+/\mathcal{E}$ le k-feuilletage tel que $\mathbb{X}^+ = \mathrm{Spec}(k[t, e])$ et

$$\Omega_{\mathbb{X}^+/\mathcal{E}} = \frac{\Omega_{\mathbb{X}^+/k}}{(\mathrm{d}e - e \cdot \mathrm{d}t)}.$$

De même, on note $\mathbb{X}^-/\mathcal{E}$ le k-feuilletage tel que $\mathbb{X}^- = \mathrm{Spec}(k[t, e^{-1}])$ et

$$\Omega_{\mathbb{X}^-/\mathcal{E}} = \frac{\Omega_{\mathbb{X}^-/k}}{(\mathrm{d}(e^{-1}) + e^{-1} \cdot \mathrm{d}t)}.$$

Les inclusions évidentes $k[t, e] \hookrightarrow k[t, e, e^{-1}]$ et $k[t, e^{-1}] \hookrightarrow k[t, e, e^{-1}]$ fournissent des immersions ouvertes basiques de k-feuilletages

$$\mathbb{X}/\mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{X}^+/\mathcal{E} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{X}/\mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{X}^-/\mathcal{E}.$$

On pose

$$\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} = (\mathbb{X}^+/\mathcal{E}) \coprod_{(\mathbb{X}/\mathcal{E})} (\mathbb{X}^-/\mathcal{E}).$$

Ainsi, $\overline{X}/\mathcal{E}$ est un k-feuilletage différentiellement lisse dont le k-schéma sous-jacent est isomorphe à $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$. La projection sur le premier facteur fournit un morphisme différentiellement étale

$$t : \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k/k$$

ce qui permet de munir le k-schéma $\overline{\mathbb{X}}$ d'une structure de ∂-schéma telle que $\partial(t) = 1$, $\partial(e) = e$ et $\partial(e^{-1}) = -e^{-1}$. On dispose aussi de deux sections différentiellement étales au morphisme t :

$$s_0 : \mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \qquad \text{et} \qquad s_\infty : \mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}.$$

La première se factorise par $\mathbb{X}^+/\mathcal{E}$ et correspond à l'immersion fermée de (k, ∂)-schémas de ∂-idéal $(e) \subset k[t, e]$. La seconde se factorise par $\mathbb{X}^-/\mathcal{E}$ et correspond à l'immersion fermée de (k, ∂)-schémas de ∂-idéal $(e^{-1}) \subset k[t, e^{-1}]$. Enfin, on note

$$\overline{e} : \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{P}^1_k/k$$

le morphisme de k-feuilletages donné par la projection sur le second facteur modulo l'identification $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$. On fera attention que contrairement au morphisme $t : \overline{X}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k/k$, le morphisme $\overline{e}$ n'est pas différentiellement étale. En effet, on dispose de deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k/k \arrow[r, "s_0"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "\overline{e}"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s_0"] & \mathbb{P}^1_k/k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k/k \arrow[r, "s_\infty"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "\overline{e}"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s_\infty"] & \mathbb{P}^1_k/k \end{tikzcd}$$

montrant que les fibres du morphisme $\overline{e}$ en $0 \in \mathbb{P}^1_k$ et $\infty \in \mathbb{P}^1$ ne sont pas des k-feuilletages discrets. Toutefois, ces deux points constituent les seules exceptions : le morphisme $\overline{e}$ est différentiellement étale au-dessus de l'ouvert $\mathbb{E}^1_k = \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1_k$. Ainsi, on dispose d'un carré cartésien de k-feuilletages

$$\begin{tikzcd} \mathbb{X}/\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "e"] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "\overline{e}"] \\ \mathbb{E}^1_k/k \arrow[r] & \mathbb{P}^1_k/k \end{tikzcd}$$

et la flèche verticale de gauche est différentiellement étale. □

Démonstration de la Proposition 1.9. — Le morphisme $\widetilde{\gamma}'$ se factorise de la manière suivante

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\widetilde{\alpha}^*} \underline{\mathcal{H}om}((\mathbb{P}^1_k, \{0, \infty\}) \otimes \mathbb{Z}[2], \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \tag{11}$$

où la première flèche est déduite par adjonction du morphisme structural du $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$-prémodule. La seconde flèche dans (11) est déduite du morphisme $\widetilde{\alpha} : \widetilde{T}[-2] \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$ par application du foncteur $\underline{\mathcal{H}om}(-, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))$.

On dispose d'un morphisme d'unité $\mathrm{u} : \mathbb{Z}_{cst} \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$ qui induit une rétraction

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\mathrm{u}^*} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$$

au premier morphisme dans (11). Nous allons construire une flèche

$$\nu : \underline{\mathcal{H}om}((\mathbb{P}^1, \{0, \infty\}) \otimes \mathbb{Z}[-2], \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \tag{12}$$

qui fait commuter le triangle

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[r, "\widetilde{\alpha}^*"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{u}^*"'] & \underline{\mathcal{H}om}((\mathbb{P}^1_k, \{0, \infty\}) \otimes \mathbb{Z}[-2], \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[d, "\nu"] \\ & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M). \end{tikzcd} \tag{13}$$

Clairement, ceci permettra de conclure. On divise l'argument en trois étapes. Dans la première étape, on introduit le complexe $\mathcal{K}$ de préfaisceaux sur SmFol/k. Dans la seconde étape, on construit la flèche ν et dans la troisième, on démontre que le triangle (13) commute.

Étape 1 : En plus des morphismes et diagrammes introduits dans la Notation 1.12, nous formons les deux carrés cartésiens de k-feuilletages

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^{1,\delta}_k \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "t"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "i_0"] & \mathbb{A}^1_k/k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^{1,\delta}_k \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "t"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "i_1"] & \mathbb{A}^1_k/k, \end{tikzcd}$$

où i_0 et i_1 désignent respectivement les sections nulle et unité de $\mathbb{A}^1_k$.

Considérons le complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k :

$$\mathcal{K} = \left[(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} [0] & [\infty] \\ [0]-[1] & 0 \\ 0 & [0]-[1] \end{pmatrix}} (\mathbb{P}^{1,\delta}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{(i_1-i_0,\, s_0,\, s_\infty)} (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z} \right]$$

où le préfaisceau $(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z}$ est placé en degré cohomologique 2. Considérons également le complexe de préfaisceaux groupes abéliens sur SmFol/k :

$$\mathcal{Q} = \left[0 \longrightarrow (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{(s_0,s_\infty)} \mathbb{P}^1\otimes\mathbb{Z} \right]$$

où le préfaisceaux $\mathbb{P}^1\otimes\mathbb{Z}$ est placé en degré cohomologique 2. On dispose d'un quasi-isomorphisme évident de complexes de préfaisceaux $\mathcal{Q}\longrightarrow \widetilde{T}[-2]$. Par ailleurs, on dispose aussi d'un morphisme de complexes de préfaisceaux $\overline{e} : \mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{Q}$ donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{P}^{1,\delta}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}"] & (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z} \arrow[d, "\overline{e}"] \\ 0 \arrow[r] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathbb{P}^1\otimes\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

où $p : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathrm{pt}$ est la projection évidente.

Avec les notations précédentes, on obtient une chaîne des morphismes de complexes de préfaisceaux sur SmFol/k :

$$\underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\{0,\infty\}),\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) = \underline{\mathcal{H}om}(\widetilde{T}[-2],\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\text{q.-i.}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{Q},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)). \tag{14}$$

Étape 2 : Dans cette étape, nous utiliserons le fait que $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant pour construire la flèche (12). Considérons le complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k :

$$\mathcal{L} = \left[(\mathrm{pt}\oplus\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\oplus\mathbb{Z}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{(0,1,1)} (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \right].$$

On dispose d'un morphisme de complexes de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k

$$\pi : \mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{L} \tag{15}$$

qui est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & (\mathbb{P}^{1,\delta}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}"] & (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z} \arrow[d, "p"] \\
(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

où p désigne les projections évidentes vers pt. On dispose aussi d'un morphisme de complexes de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k

$$\sigma : \mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{L} \tag{16}$$

qui est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 3} \arrow[r] & \mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Étant donné que $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant, les morphismes évidents

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}^1,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))$$

sont des quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux. D'après le Lemme 1.13 ci-dessous, il en est de même du morphisme

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{X}/\mathcal{E},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)).$$

Il s'ensuit que le morphisme évident

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\pi^*} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. On définit alors une flèche

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M) \tag{17}$$

dans $\mathbf{Ho}_{\psi\text{-}ft}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)))$ en prenant la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow[\sim]{(\pi^*)^{-1}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M).$$

La flèche ν qui nous intéresse est alors définie comme étant la composition de (14) et (17).

Étape 3 : Dans cette étape, nous allons vérifier que la flèche ν définie dans l'étape précédente fait commuter le triangle (13). Autrement dit, nous allons vérifier que la composition de

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega),\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[r, "\tilde{\alpha}^*"] & \underline{\mathcal{H}om}(\widetilde{T}[-2],\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[r, "(14)"] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[d, "(\pi^*)^{-1}", "\sim"'] & \\
 & & \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L},\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \arrow[r, "\sigma^*"] & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)
\end{tikzcd} \tag{18}$$

coïncide avec le morphisme u^* induit par l'unité de $\tau^{\leqslant 1}\Omega$. Pour ce faire, nous donnerons une description simple, à homotopie près, de la composition de

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\bar{e}} \mathcal{Q} \simeq \widetilde{T}[-2] \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega)$$

(ce qui est responsable de la première ligne dans (18)). Pour faciliter la lecture, nous divisons la présente étape en plusieurs sous-étapes.

Sous-étape 3.1 : Dans cette sous-étape, nous expliciterons le morphisme
$$\mathcal{Q} \simeq \widetilde{T}[-2] \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega).$$
Rappelons qu'il s'agit de la composition de
$$\mathcal{Q} \simeq \widetilde{T}[-2] \xrightarrow{\widetilde{\eta}} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times}[-1]) \xrightarrow{\mathrm{d}\log} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{-1}\Omega)$$
et que $\widetilde{\eta}$ correspond à la classe $\widetilde{\eta} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k, \{0,\infty\})$ de l'idéal $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ des fonctions qui s'annulent en $1 \in \mathbb{P}^1_k$ muni de la trivialisation évidente au-dessus de $\{0,\infty\} \subset \mathbb{P}^1_k$.

Appelons
$$\mathbb{A}^{1,+}_k = \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(k[e]) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{A}^{1,-}_k = \mathbb{P}^1_k \smallsetminus \{0\} = \mathrm{Spec}(k[e^{-1}])$$
les deux ouverts affines standards de $\mathbb{P}^1_k$ de sorte que
$$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^{1,+}_k \coprod_{\mathbb{E}^1_k} \mathbb{A}^{1,-}_k.$$
Il existe alors des uniques trivialisations
$$u^+ : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,+}_k} \simeq \mathcal{I}_1|_{\mathbb{A}^{1,+}_k} \qquad \text{et} \qquad u^- : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{1,-}_k} \simeq \mathcal{I}_1|_{\mathbb{A}^{1,-}_k}$$
qui étendent les trivialisations au-dessus de $0 \in \mathbb{A}^{1,+}_k$ et $\infty \in \mathbb{A}^{1,-}_k$. Clairement, $u^+(1) = 1 - e \in k[e]$ et $u^-(1) = 1 - e^{-1}$. On trouve alors que l'automorphisme $u^+|_{\mathbb{E}^1_k} \circ (u^-|_{\mathbb{E}^1_k})^{-1}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{E}^1_k}$ est la multiplication par
$$\frac{1-e}{1-e^{-1}} = -e \in k[e,e^{-1}]^{\times}.$$
On peut interpréter ce calcul de la manière suivante. Appelons $\mathcal{Q}'$ le bicomplexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k :
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{E}^1 \otimes \mathbb{Z} \arrow[d, "\begin{pmatrix} j_+ \\ -j_- \end{pmatrix}"] \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \oplus (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r, "\begin{pmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & s_\infty \end{pmatrix}"] & (\mathbb{A}^{1,+}\otimes\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{A}^{1,-}\otimes\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$
où le « 0 » de la ligne inférieure est placé en bidegré $(0,0)$. Les inclusions évidentes $\mathbb{A}^{1,\pm}_k \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$ fournissent un morphisme de complexes de préfaisceaux
$$\mathrm{Tot}(\mathcal{Q}') \longrightarrow \mathcal{Q}$$
qui est une équivalence *Zar*-locale. De plus, il existe un carré commutatif à homotopie près
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tot}(\mathcal{Q}') \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \mathcal{Q} \arrow[d, "\widetilde{\eta}"] \\
\mathcal{O}^{\times}[-1] \arrow[r] & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\mathcal{O}^{\times})[-1]
\end{tikzcd}$$
avec θ le morphisme de complexes de préfaisceaux donné par le diagramme
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{E}^1\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "(0,-e)"] & (\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 2} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{\times} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit aussitôt qu'on a également un carré commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tot}(\mathcal{Q}') \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{Q} \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"] \\ \tau^{\leqslant 1}\Omega \arrow[r] & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \end{tikzcd}$$

avec β le morphisme de complexes de préfaisceaux donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{E}^1\otimes\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,\mathrm{d}\log(e))}"] & (\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})^{\oplus 2} \arrow[d] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sous-étape 3.2 : Appelons $\mathcal{K}'$ le bicomplexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur SmFol/k

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{E}^{1,\delta} \arrow[r, "i_1-i_0"] \arrow[d, "C"] & \mathbb{X}/\mathcal{E} \arrow[d, "\begin{pmatrix} j_+ \\ -j_- \end{pmatrix}"] \\ \mathrm{pt}\oplus\mathrm{pt} \arrow[r, "A"] & \mathbb{A}^{1,+,\delta}\oplus\mathbb{A}^{1,-,\delta}\oplus\mathbb{A}^1\oplus\mathbb{A}^1 \arrow[r, "B"] & (\mathbb{X}^+/\mathcal{E})\oplus(\mathbb{X}^-/\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

avec A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} [0] & 0 \\ 0 & [\infty] \\ [0]-[1] & 0 \\ 0 & [0]-[1] \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i_1-i_0 & 0 & s_0 & 0 \\ 0 & i_1-i_0 & 0 & s_\infty \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} j_+ \\ -j_- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ci-dessus, nous avons écrit « pt », « $\mathbb{A}^{1,+,\delta}$ », etc., au lieu de « $\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}$ », « $\mathbb{A}^{1,+,\delta}\otimes\mathbb{Z}$ », etc., afin que le diagramme décrivant $\mathcal{K}'$ tienne sur la page. Précisons également que le préfaisceau $\mathrm{pt}\oplus\mathrm{pt}$ est placé en degré cohomologique $(0,0)$.

Les inclusions évidentes $\mathbb{A}^{1,\pm,\delta}\hookrightarrow\mathbb{P}^{1,\delta}_k$ et $\mathbb{X}^{\pm}/\mathcal{E}\hookrightarrow\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}$ fournissent un morphisme de complexes de préfaisceaux

$$\mathrm{Tot}(\mathcal{K}')\longrightarrow\mathcal{K}'$$

qui est une équivalence *Zar*-locale. Par ailleurs, on dispose d'un morphisme de bicomplexes $\varepsilon:\mathcal{K}'\longrightarrow\mathcal{Q}'$ induit par les morphismes $p:\mathbb{A}^1\longrightarrow\mathrm{pt}$, $e:\mathbb{X}/\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{E}^1_k/k$ et $e^{\pm}:\mathbb{X}^{\pm}/\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{A}^{1,\pm}_k/k$. De plus, le carré suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tot}(\mathcal{K}') \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathcal{K} \arrow[d, "\overline{e}"] \\ \mathrm{Tot}(\mathcal{Q}') \arrow[r] & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Ainsi, grâce à la Sous-étape 3.1, on déduit un carré commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tot}(\mathcal{K}') \arrow[r] \arrow[d, "\beta\circ\varepsilon"] & \mathcal{K} \arrow[d, "\widetilde{\alpha}\circ\overline{e}"] \\ \tau^{\leqslant 1}\Omega \arrow[r] & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \end{tikzcd}$$

avec $\beta \circ \varepsilon$ le morphisme de complexes de préfaisceaux donné par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \oplus \mathrm{pt} \oplus \mathbb{E}^{1,\delta} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{A}^{1,+,\delta} \oplus \mathbb{A}^{1,-,\delta} \oplus \mathbb{A}^1 \oplus \mathbb{A}^1 \oplus (\mathbb{X}/\mathcal{E}) \arrow[r, "B'"] \arrow[d, "{(0,0,0,0,\mathrm{d}\log(e))}"] & (\mathbb{X}^+/\mathcal{E}) \oplus (\mathbb{X}^-/\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Bien entendu, A' et B' sont les matrices suivantes :

$$A' = \begin{pmatrix} [0] & 0 & -j_+ \\ 0 & [\infty] & j_- \\ [0]-[1] & 0 & 0 \\ 0 & [0]-[1] & 0 \\ 0 & 0 & i_1 - i_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B' = \begin{pmatrix} i_1 - i_0 & 0 & s_0 & 0 & j_+ \\ 0 & i_1 - i_0 & 0 & s_\infty & -j_- \end{pmatrix}.$$

On arrive à présent à un point clef de la démonstration, i.e., celui où l'on utilise la structure de feuilletage sur $\mathbb{X}/\mathcal{E}$ pour modifier à homotopie près le morphisme $\beta \circ \varepsilon$ d'une manière non triviale. En effet, considérons l'homotopie

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \oplus \mathrm{pt} \oplus \mathbb{E}^{1,\delta} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{A}^{1,+,\delta} \oplus \mathbb{A}^{1,-,\delta} \oplus \mathbb{A}^1 \oplus \mathbb{A}^1 \oplus (\mathbb{X}/\mathcal{E}) \arrow[r, "B'"] \arrow[d, "{(0,0,0,0,\mathrm{d}\log(e))}"] \arrow[dl, bend right, "{(1,0,0,0,t)}"'] & (\mathbb{X}^+/\mathcal{E}) \oplus (\mathbb{X}^-/\mathcal{E}) \arrow[d] \arrow[dl, bend left, "{(0,0)}"] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Étant donné que dans $\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{X}/\mathcal{E})$ on a la relation $\mathrm{d}_{\mathcal{E}}(t) = \mathrm{d}_{\mathcal{E}} \log(e)$, le morphisme homotopiquement nul « $dh + hd$ » correspondant à cette homotopie est donné par

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \oplus \mathrm{pt} \oplus \mathbb{E}^{1,\delta} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "{(1,0,0)}"] & \mathbb{A}^{1,+,\delta} \oplus \mathbb{A}^{1,-,\delta} \oplus \mathbb{A}^1 \oplus \mathbb{A}^1 \oplus (\mathbb{X}/\mathcal{E}) \arrow[r, "B'"] \arrow[d, "{(0,0,0,0,\mathrm{d}\log(e))}"] & (\mathbb{X}^+/\mathcal{E}) \oplus (\mathbb{X}^-/\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ainsi, nous avons montrer que le morphisme $\beta \circ \varepsilon$ est homotope au morphisme $\mu' : \mathrm{Tot}(\mathcal{K}') \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$ donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \oplus \mathrm{pt} \oplus \mathbb{E}^{1,\delta} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "{(-1,0,0)}"] & \mathbb{A}^{1,+,\delta} \oplus \mathbb{A}^{1,-,\delta} \oplus \mathbb{A}^1 \oplus \mathbb{A}^1 \oplus (\mathbb{X}/\mathcal{E}) \arrow[r, "B'"] \arrow[d, "0"] & (\mathbb{X}^+/\mathcal{E}) \oplus (\mathbb{X}^-/\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On conclut cette sous-étape en remarquant que le morphisme μ' se factorise par un morphisme $\mu : \mathcal{K} \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$ donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \oplus \mathrm{pt} \arrow[r] \arrow[d, "{(-1,0,0)}"] & \mathbb{P}^{1,\delta} \oplus \mathbb{A}^1 \oplus \mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De plus, on a un triangle commutatif à dans la catégorie dérivée des complexes de préfaisceaux sur SmFol/k :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}\circ\bar{e}"'] & \tau^{\leqslant 1}\Omega \arrow[d] \\ & \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega). \end{tikzcd}$$

Sous-étape 3.3 : Il est maintenant aisé de conclure. Rappelons qu'il nous restait à vérifier que la composition de (18) coïncide avec le morphisme u^* induit par l'unité de $\tau^{\leqslant 1}\Omega$. Grâce à la Sous-étape 3.2, nous savons que la composition de la première ligne dans (18) coïncide (à homotopie près) avec la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\text{q.-i.}} \underline{\mathcal{H}om}(\tau^{\leqslant 1}\Omega, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\mu^*} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)).$$

Or, visiblement, le morphisme μ se factorise par le morphisme $\mathrm{v} : \mathcal{L} \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$ donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pt}\oplus\mathrm{pt} \arrow[r] \arrow[d, "(-1,0,0)"] & \mathrm{pt}\oplus\mathrm{pt}\oplus\mathrm{pt} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathrm{pt} \arrow[d] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\tau^{\leqslant 1}\Omega, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\mu^*} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow[\sim]{(\pi^*)^{-1}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L}, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))$$

est donnée par le morphisme

$$\mathrm{v}^* : \underline{\mathcal{H}om}(\tau^{\leqslant 1}\Omega, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L}, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)).$$

Ainsi, la composition de (18) coïncide avec la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(\tau^{\leqslant 1}\Omega), \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\text{q.-i.}} \underline{\mathcal{H}om}(\tau^{\leqslant 1}\Omega, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\mathrm{v}^*} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{L}, \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M).$$

Pour terminer, il reste à remarquer que la composition de

$$\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L} \xrightarrow{\mathrm{v}} \tau^{\leqslant 1}\Omega$$

n'est autre que le morphisme unité $\mathrm{u} : \mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z} \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega$. ■

Le lemme ci-dessous a servi, comme ingrédient crucial, dans la deuxième étape de la preuve de la Proposition 1.9.

Lemme 1.13. — *Soit F un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k. *On suppose que F est projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrant. Alors, le morphisme évident*

$$F \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{X}/\mathcal{E}, F)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux.

Démonstration. — Puisque F est projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrant, il suffit de montrer que le morphisme de préfaisceaux

$$t : (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\Lambda \longrightarrow \mathbb{A}^1_k\otimes\Lambda \tag{20}$$

est une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-locale.

On dispose d'un recouvrement ψ-feuilleté $\{\mathbb{X}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k/k\}$. On forme l'objet simplicial de Čech $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet$ associé à ce recouvrement. Ainsi,

$$Y_n/\mathcal{G}_n = \overbrace{(\mathbb{X}/\mathcal{E}) \times_{\mathbb{A}^1_k} \cdots \times_{\mathbb{A}^1_k} (\mathbb{X}/\mathcal{E})}^{n+1 \text{ fois}}$$

et on dispose d'une augmentation $Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet \longrightarrow \mathbb{A}^1_k/k$ qui induit une équivalence ψ-*ft*-locale de complexes de préfaisceaux

$$(Y_\bullet/\mathcal{G}_\bullet)\otimes\Lambda \longrightarrow \mathbb{A}^1_k\otimes\Lambda.$$

Par changement de base suivant (20), on dispose également d'une équivalence ψ-*ft*-locale de complexes de préfaisceaux

$$(Z_\bullet/\mathcal{H}_\bullet)\otimes\Lambda \longrightarrow (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\Lambda$$

où $Z_n/\mathcal{H}_n = (Y_n/\mathcal{G}_n)\times_{\mathbb{A}^1_k}(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})$. Étant donné que les colimites homotopiques préservent les équivalences $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-locales, il est donc suffisant de montrer que les morphismes

$$(Z_n/\mathcal{H}_n)\otimes\Lambda \longrightarrow (Y_n/\mathcal{G}_n)\otimes\Lambda$$

sont des équivalences $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locales pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Un calcul facile montre que

$$Y_n = \mathrm{Spec}(k[t,e_0,e_0^{-1},\cdots,e_n,e_n^{-1}])$$

et que $\mathrm{d}_{\mathcal{G}_n}(e_i) = e_i\cdot \mathrm{d}_{\mathcal{G}_n}(t)$. En particulier, les fonctions inversibles $e_0^{-1}\cdot e_i$, pour $1\leqslant i\leqslant n$, sont constantes sur les feuilles de $Y_n/\mathcal{G}_n$. Ceci fournit un isomorphisme de $\mathbb{A}^1_k/k$-feuilletages

$$Y_n/\mathcal{G}_n \simeq (\mathbb{X}/\mathcal{E})\times_k(\mathbb{E}^{1,\delta}_k)^n.$$

Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$((\mathbb{X}/\mathcal{E})\times_{\mathbb{A}^1_k}(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}))\otimes\Lambda \longrightarrow (\mathbb{X}/\mathcal{E})$$

est une équivalence $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locale. Un calcul similaire au précédent fournit un isomorphisme de $(\mathbb{X}/\mathcal{E})$-feuilletages

$$(\mathbb{X}/\mathcal{E})\times_{\mathbb{A}^1_k}(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}) \simeq (\mathbb{X}/\mathcal{E})\times_k\mathbb{P}^{1,\delta}_k.$$

Ceci permet de conclure. ■

Dans le reste de la sous-section, on explique comment déduire le Théorème 1.7 de la Proposition 1.8 (qui est à présent démontrée comme conséquence de la Proposition 1.9 et du Lemme 1.10).

Démonstration du Théorème 1.7. — D'après la Proposition 1.8, on dispose d'un morphisme de complexe de préfaisceaux

$$\rho : \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k,\infty),\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2]) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)$$

tel que $\rho\circ\gamma'$ est l'identité à homotopie près. Pour conclure, il est donc suffisant de montrer que $\gamma'\circ\rho$ est aussi l'identité à homotopie près. Pour ce faire, on utilisera la propriété suivante. [1] Étant donné un complexe de préfaisceaux A sur SmFol/k, le triangle suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{H}om}(A,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))) \arrow[r, "\underline{\mathcal{H}om}(A,\rho_{\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)})"] \arrow[d, "\sim"] & \underline{\mathcal{H}om}(A,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \\
\underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(A,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))) \arrow[ur, bend right, "\rho_{\underline{\mathcal{H}om}(A,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))}"'] &
\end{tikzcd} \tag{21}$$

commute à homotopie près.

Pour montrer que $\rho\circ\gamma'$ est l'identité à homotopie près, on procède de la manière suivante. On sait que la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \xrightarrow{\underline{\mathcal{H}om}(T,\gamma')} \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M))) \xrightarrow{\underline{\mathcal{H}om}(T,\rho)} \underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)) \tag{22}$$

1. Il va falloir vérifier cela...

est homotope à l'identité. Par ailleurs, on sait que la permutation des facteurs $\tau : T^{\otimes 2} \simeq T^{\otimes 2}$ est l'identité dans $\mathbf{DA}^{\mathit{eff},\acute{e}t}(k;\Lambda)$ est donc aussi dans $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\mathit{ft}}(k;\Lambda)$. (Ceci découle de [**14**, Théorème B.1] et de l'assertion analogue sur le motif de Tate dans $\mathbf{DM}^{\mathit{eff}}(k;\Lambda)$; voir [**84**, Lemma 4.8] et [**87**, Chapter 5, Corollary 2.1.5].) Il s'ensuit que l'automorphisme

$$\underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))) \xrightarrow[\sim]{\tau^*} \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)))$$

est l'identité. En injectant ceci dans (22), on trouve donc que la composition de

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)) \arrow[r, "\underline{\mathcal{H}om}(T,\gamma')"] & \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))) \arrow[d, "\tau^*", "\sim"'] & \\
& \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))) \arrow[r, "\underline{\mathcal{H}om}(T,\rho)"] & \underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))
\end{tikzcd} \tag{23}$$

est homotope à l'identité. Vu la commutation à homotopie près du diagramme (21), on trouve que la composition de

$$\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)) \xrightarrow{\underline{\mathcal{H}om}(T,\gamma'_M)} \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))) \xrightarrow{\rho_{\underline{\mathcal{H}om}(T,M)}} \underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)) \tag{24}$$

est homotope à l'identité. Or, le carré suivant [(2)]

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)) \arrow[r, "\underline{\mathcal{H}om}(T,\gamma'_M)"] \arrow[d, "\rho_M"] & \underline{\mathcal{H}om}(T,\underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M))) \arrow[d, "\rho_{\underline{\mathcal{H}om}(T,M)}"] \\
\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M) \arrow[r, "\gamma'_M"] & \underline{\mathcal{H}om}(T,\mathrm{R}_{\psi\text{-}\mathit{ft}}(M)).
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci permet de conclure. ■

1.2. Structures de modèles $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisées. —

Dans cette sous-section, nous introduisons les structures de modèles $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisées. Les notions se rattachant à ces structures de modèles sont déjà apparues dans la Sous-section 1.1, et notamment dans la Définition 1.6 et dans la preuve du Lemme 1.13 où l'on utilise, implicitement, l'existence de la localisation de Bousfield produisant la structure de modèles $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}\mathit{ft})$-locale.

Dans la suite, on supposera que $\tau \in \{\psi\text{-}\acute{e}t, \psi\text{-}\mathit{ft}\}$. [(3)] Soit $S/\mathcal{E}$ un k-feuilletage différentiellement lisse.

Définition 1.14. — *La* structure de modèles projective *(resp.* injective*)* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-locale *sur la catégorie* $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S;\Lambda))$ *est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective)* $(\mathbb{A}^1,\tau)$-*locale suivant la classe des morphismes* $(\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (X/\mathcal{F})) \otimes \Lambda[n] \longrightarrow (X/\mathcal{F}) \otimes \Lambda[n]$ *avec* $X/\mathcal{F} \in \mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

Les équivalences faibles relativement à cette structure de modèles localisée sont appelées les équivalences $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-locales *et leur classe est désignée par* $\mathbf{W}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau}$. *Les fibrations relativement à cette structure de modèles sont appelées les* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrations projectives *(resp.* injectives*) et leur classe est désignée par* $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{proj}}$ *(resp.* $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{inj}}$*).*

On dispose de la description suivante des objets $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrants.

Lemme 1.15. — *Soit L un complexe de préfaisceaux (de Λ-modules) sur* $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$. *Alors, L est projectivement (resp. injectivement)* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-*fibrant si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :*

(a) L est projectivement (resp. injectivement) τ-fibrant ;

---

2. Il faut aussi vérfier ça...

3. Le choix $\tau = \mathit{ft}$ n'est pas judicieux pour parler de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation. En effet, le faisceau feuilleté associé à $\mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes \Lambda$ contient une comme facteur direct le faisceau feuilleté associé à $\{0,\infty\} \otimes \Lambda \simeq \Lambda^{\oplus 2}$. Ainsi, la catégorie de modèles $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathit{ft})$-localisée est Quillen équivalente à la catégorie de modèles nulle. Autrement dit, tout morphisme de complexes de préfaisceaux sur SmFol/k est une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathit{ft})$-locale et les objets $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathit{ft})$-fibrants sont acycliques.

(b) *pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $L(X/\mathcal{F}) \longrightarrow L(\mathbb{A}^1_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme ;*
(c) *pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $L(X/\mathcal{F}) \longrightarrow L(\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (X/\mathcal{F}))$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Ceci découle du Lemme **??** et de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Définition 1.16. — *Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ un motif feuilleté effectif. On dit que M est* $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local *si l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})[n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (X/\mathcal{F}))[n], M)$$

est bijective pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement $(\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant de M est un complexe de préfaisceaux $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant. On note $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ formée des motifs $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux.

Lemme 1.17. — *L'inclusion $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ possède un adjoint à gauche*

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}} : \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda). \quad (25)$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Notation 1.18. — Par abus de language, on notera aussi $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$ la composition de (25) avec l'inclusion de la sous-catégorie des motifs feuilletés effectifs $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux. Ainsi, $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$ devient un endofoncteur de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$. □

Définition 1.19. — *La* structure de modèles projective *(resp.* injective*)* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-locale stable *sur la catégorie $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S;\Lambda)))$ est la structure stable (voir* [**12**, Définitions 4.3.29]*) déduite de la structure projective (resp. injective) $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-locale.* [4]

Les équivalences faibles relativement à cette structure de modèles localisée sont appelées les équivalences $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-locales stables *et leur classe est désignée par $\mathbf{W}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}}$. Les fibrations relativement à cette structure de modèles sont appelées les* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrations projectives *(resp.* injectives*)* stables *et leur classe est désignée par $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}-\mathrm{proj}}$ (resp. $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^{1,\delta}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}-\mathrm{inj}}$).*

Lemme 1.20. — *Soit $\mathbf{E}$ un T-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux (de Λ-modules) sur $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$. Alors, $\mathbf{E}$ est stablement projectivement (resp. injectivement) $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant si et seulement si il vérifie les quatre propriétés suivantes :*
(a) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}_n$ est projectivement (resp. injectivement) τ-fibrant ;*
(b) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_n(\mathbb{A}^1_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme ;*
(c) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_n(\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (X/\mathcal{F}))$ est un quasi-isomorphisme ;*
(d) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_{n+1}(\mathbb{P}^1_X/\mathcal{F}, \infty_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Ceci découle du Lemme **??** et de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Théorème 1.21. — *Soit M un complexe de préfaisceaux de $\mathcal{O}^{\delta}$-modules et considérons le T-spectre $\mathbf{M} = \{\mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}(M)[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ associé à M (voir la Construction 1.5). Supposons que M est projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant. Alors, le T-spectre $\mathbf{M}$ est projectivement stablement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant.*

Démonstration. — Vu le Lemme 1.20, il s'agit d'une reformulation du Théorème 1.7. ■

4. Pour le cas respé, il faut remarquer que l'endofoncteur $T \otimes -$ est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures injectives, bien que ces dernières ne soient pas compatibles aux structures monoidales. En effet, T est un préfaisceaux en Λ-modules libres !

Définition 1.22. — *Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ un motif feuilleté. On dit que M est* $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local *si l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (X/\mathcal{F}))(m)[n], M)$$

est bijective pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ et tout $m, n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement stablement $(\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant de M est un T-spectre stablement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant. On note $\mathbf{FolDA}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ formée des motifs $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux.

Lemme 1.23. — *L'inclusion $\mathbf{FolDA}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ possède un adjoint à gauche*

$$\mathrm{Loc}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}} : \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda). \tag{26}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Notation 1.24. — Par abus de language, on notera aussi $\mathrm{Loc}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$ la composition de (26) avec l'inclusion de la sous-catégorie des motifs feuilletés $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux. Ainsi, $\mathrm{Loc}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$ devient un endofoncteur de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E})$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\tau}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}$. □

Le résultat suivant nécessite de travailler avec les catégories de motifs feuilletés stables.

Théorème 1.25. — *Le foncteur*

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} : \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda)$$

préserve les objects $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux, i.e., il se restreint en un foncteur

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} : \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda).$$

De plus, on dispose d'un carré commutatif à isomorphisme près

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}"] \arrow[d, "\mathrm{Loc}^{\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}"] & \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[d, "\mathrm{Loc}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}"] \\
\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}"] & \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A : On montre d'abord qu'il est suffisant de prouver la première assertion de l'énoncé, i.e., que $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ préserve les objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux. Ainsi, on suppose que cette prorpriété est vraie et on explique comment démontrer la seconde assertion de l'énoncé.

Le foncteur $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ possède un adjoint à droite

$$\mathrm{o}_{\psi\text{-}ft} : \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(S/\mathcal{E};\Lambda)$$

qui préserve les objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux pour des raisons formelles. La propriété que $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ préserve les objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux entraîne alors que le foncteur

$$\mathrm{o}_{\psi\text{-}ft} : \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda),$$

obtenu par restriction aux objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux, admet lui aussi un adjoint à gauche et que cet adjoint est donné par la restriction de $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ aux objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux.

Par ailleurs, on a un carré commutatif évident

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{o}_{\psi\text{-}ft}"] \arrow[d] & \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[d] \\
\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{o}_{\psi\text{-}ft}"] & \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(S/\mathcal{E};\Lambda)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les inclusions évidentes. En passant aux adjoints à gauche, on trouve le carré commutatif de l'énoncé.

Partie B : Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ét}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ un motif feuilleté $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local. Dans cette étape, nous allons montrer que $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est aussi $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local.

Notons $p^{\delta} : \mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k (S/\mathcal{E}) \longrightarrow S/\mathcal{E}$ la projection évidente. Rappelons qu'un objet $N \in \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local si et seulement si le morphisme d'unité

$$N \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}p^{\delta}_{*}(p^{\delta})^{*}N$$

est inversible. Ainsi, pour démontrer que $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}(M)$ est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local il est suffisant de montrer que la transformation naturelle

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}p^{\delta}_{*} \circ (p^{\delta})^{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}p^{\delta}_{*} \circ (p^{\delta})^{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$$

est inversible. Cette transformation naturelle admet la factorsiation suivante

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}p^{\delta}_{*} \circ (p^{\delta})^{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}p^{\delta}_{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ (p^{\delta})^{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}p^{\delta}_{*} \circ (p^{\delta})^{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}.$$

De plus, la transformation naturelle $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ (p^{\delta})^{*} \longrightarrow (p^{\delta})^{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ est inversible car le foncteur non dérivé $(p^{\delta})^{*}$ préserve les équivalences ψ-*ft*-locales. Il reste donc à montrer que la transformation naturelle $\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}p^{\delta}_{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}p^{\delta}_{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$ est inversible. Ceci découle de la Proposition 1.26 ci-dessous. ■

Proposition 1.26. — *Soit $f : T/\mathcal{H} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ un morphisme de k-feuilletages différentiellement lisses. On suppose que le morphisme sous-jacent $f : T \longrightarrow S$ est projectif et lisse. Alors, la transformation naturelle*

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}f_{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}f_{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft},$$

entre foncteurs de $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ét}(T/\mathcal{H};\Lambda)$ *dans* $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda)$*, est inversible.*

Démonstration. — Étant donné que $f : T \longrightarrow S$ est lisse, le morphisme basique $f : T/\mathcal{E} \longrightarrow S/\mathcal{E}$ est differentiellement lisse. On note $\iota : T/\mathcal{H} \longrightarrow T/\mathcal{E}$ l'inclusion évidente donnée par l'identité de T. Alors, d'après le Lemme **??** (voir aussi la Remarque **??**), la transformation naturelle

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}\,\iota_{*} \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}\,\iota_{*} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$$

est inversible. Il est donc suffisant de traiter la cas du morphisme basique $f : T/\mathcal{E} \longrightarrow S/\mathcal{E}$.

D'après le Théorème **??** (et le Théorème **??**), il existe des transformations naturelles inversibles

$$\mathrm{L}f_{\sharp} \circ \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}f_{*} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}f_{\sharp} \circ \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f) \longrightarrow \mathrm{R}_{\psi\text{-}ft}f_{*}$$

qui sont inversibles car f est projectif. On est ainsi ramené à montrer que la transformation naturelle

$$\mathrm{a}_{\psi\text{-}ft} \circ \mathrm{L}f_{\sharp} \longrightarrow \mathrm{L}f_{\sharp} \circ \mathrm{a}_{\psi\text{-}ft}$$

est inversible. Ceci découle aussitôt du fait que le foncteur $\mathrm{L}f_{\sharp}$, dérivé à gauche relativement aux structures globales, préserve les équivalences τ-locales pour $\tau \in \{\psi\text{-}ét, \psi\text{-}ft\}$. ■

1.3. La $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation de certaines suspensions infinies. —

Pour les besoins des preuves et pour avoir des énonés plus généraux on commence cette sous-section par introduire une nouvelle localisation de Bousfield. Sauf mention explicite du contraire, on supposera dans cette sous-section que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét, \psi\text{-}ft\}$. Le cas $\tau = \psi\text{-}ft$ sera redondant ; voir le Lemme 1.29. Sauf mention explicite du contraire, $\overline{\mathbb{X}}$ et $\mathbb{X}$ désignent les k-feuilletages $\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}$ et $\mathbb{X}/\mathcal{E}$ (et non pas leurs k-schémas sous-jacents).

Définition 1.27. — *La* structure de modèles projective *(resp.* injective*)* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale *sur la catégorie* $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S\,;\Lambda))$ *est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective)* $(\mathbb{A}^1,\tau)$*-locale suivant la classe des morphismes* $(Y/\mathcal{G}) \otimes \Lambda[n] \longrightarrow (X/\mathcal{F}) \otimes \Lambda[n]$ *où* $X/\mathcal{F}$ *est un* $S/\mathcal{E}$*-feuilletage différentiellement lisse,* $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ *est un changement de base de* $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

Les équivalences faibles relativement à cette structure de modèles localisée sont appelées les équivalences $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locales *et leur classe est désignée par* $\mathbf{W}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau}$. *Les fibrations relativement à cette structure de modèles sont appelées les* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrations projectives *(resp.* injectives*) et leur classe est désignée par* $\mathbf{Fib}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{proj}}$ *(resp.* $\mathbf{Fib}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{inj}}$*).*

On dispose de la description suivante des objets $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrants.

Lemme 1.28. — *Soit L un complexe de préfaisceaux (de Λ-modules) sur* $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$. *Alors, L est projectivement (resp. injectivement) $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :*

(a) L est projectivement (resp. injectivement) τ-fibrant ;

(b) pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $L(X/\mathcal{F}) \longrightarrow L(\mathbb{A}^1_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme ;

(c) pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ et tout changement de base $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ de $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, le morphisme naturel $L(X/\mathcal{F}) \longrightarrow L(Y/\mathcal{G})$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Ceci découle du Lemme **??** et de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Lemme 1.29. — *Un équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale est une équivalence $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale. Lorsque $\tau = \psi$-ft, la réciproque est également vraie, i.e., les structures de modèles $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-locale et $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-locale sont les mêmes.*

Démonstration. — Seule l'assertion concernant la topologie ψ-feuilletée est non triviale. Elle découle du Lemme 1.13. ■

Définition 1.30. — *Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$ un motif feuilleté effectif. On dit que M est* $\overline{\mathbb{X}}$-local *si l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})[n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(Y/\mathcal{G})[n], M)$$

est bijective pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, tout changement de base $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ de $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est $\overline{\mathbb{X}}$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement $(\mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant de M est un complexe de préfaisceaux $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. On note $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$ formée des objets $\overline{\mathbb{X}}$-locaux.

Lemme 1.31. — *L'inclusion $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E}; \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$ possède un adjoint à gauche*

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}} : \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E}; \Lambda). \tag{27}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Notation 1.32. — Par abus de language, on notera aussi $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$ la composition de (27) avec l'inclusion de la sous-catégorie des motifs feuilletés effectifs $\overline{\mathbb{X}}$-locaux. Ainsi, $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$ devient un endofoncteur de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E})$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$. □

Définition 1.33. — *La* structure de modèles projective *(resp.* injective*)* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale stable *sur la catégorie $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S; \Lambda)))$ est la structure stable (voir* [12, Définitions 4.3.29]*) déduite de la structure projective (resp. injective) $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale.* (5)

Les équivalences faibles relativement à cette structure de modèles localisée sont appelées les équivalences $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locales stables *et leur classe est désignée par $\mathbf{W}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}}$. Les fibrations relativement à cette structure de modèles sont appelées les* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrations projectives *(resp.* injectives*)* stables *et leur classe est désignée par $\mathbf{Fib}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st-proj}}$ (resp. $\mathbf{Fib}_{\overline{\mathbb{X}}-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st-inj}}$).*

Lemme 1.34. — *Soit $\mathbf{E}$ un T-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux (de Λ-modules) sur* $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$. *Alors, $\mathbf{E}$ est stablement projectivement (resp. injectivement) $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant si et seulement si il vérifie les quatre propriétés suivantes :*

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}_n$ est projectivement (resp. injectivement) τ-fibrant ;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_n(\mathbb{A}^1_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme ;

5. Pour le cas respé, il faut remarquer que l'endofoncteur $T \otimes -$ est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures injectives, bien que ces dernières ne soient pas compatibles aux structures monoidales. En effet, T est un préfaisceaux en Λ-modules libres !

(c) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ et tout changement de base $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ de $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_n(Y/\mathcal{G})$ est un quasi-isomorphisme ;*

(d) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel $\mathbf{E}_n(X/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{E}_{n+1}(\mathbb{P}^1_X/\mathcal{F}, \infty_X/\mathcal{F})$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Ceci découle du Lemme **??** et de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Définition 1.35. — *Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ un motif feuilleté. On dit que M est $\overline{\mathbb{X}}$-local si l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)}(\mathrm{M}(Y/\mathcal{G})(m)[n], M)$$

est bijective pour tout $S/\mathcal{E}$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, tout changement de base $Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ de $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ et tout $m, n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est $\overline{\mathbb{X}}$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement stablement $(\mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant de M est un T-spectre stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. On note $\mathbf{FolDA}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ formée des motifs $\overline{\mathbb{X}}$-locaux.

Lemme 1.36. — *L'inclusion $\mathbf{FolDA}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E};\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ possède un adjoint à gauche*

$$\mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}} : \mathbf{FolDA}^{\tau}(S/\mathcal{E};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(S/\mathcal{E};\Lambda). \tag{28}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield. ■

Notation 1.37. — Par abus de language, on notera aussi $\mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$ la composition de (28) avec l'inclusion de la sous-catégorie des motifs feuilletés $\overline{\mathbb{X}}$-locaux. Ainsi, $\mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$ devient un endofoncteur de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E})$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}$. □

L'énoncé suivant généralise le Théorème 1.7.

Théorème 1.38. — *Supposons que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét, \psi\text{-}ft\}$. Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule et supposons que M est projectivement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. Alors, le morphisme*

$$\gamma' : M \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T[-2], M),$$

défini comme dans la Construction 1.5, est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Le lecteur vérifiera que la preuve du Théorème 1.7 s'applique sans changement. ■

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 1.39. — *Supposons que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule et considérons le T-spectre $\Sigma^{\infty}_T(M)$. Soit $\Sigma^{\infty}_T(M) \longrightarrow \mathbf{E}$ un remplacement projectivement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant niveau par niveau. Alors, $\mathbf{E}$ est automatiquement stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant.*

Démonstration. — Nous allons travailler avec les T-spectres commutatifs au sens de [**16**, Definition 4.4]. Ceci est loisible d'après [**16**, Theorem 4.24] et [**11**, Théorème 4.3.79]. (6) Ainsi, dans cette preuve, $\Sigma^{\infty}_T(M)$ est donné par $\mathrm{S}^n(T) \otimes M$ au niveau n.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}_n$ est un complexe de préfaisceaux projectivement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. D'après le Théorème 1.38, le morphisme

$$\gamma'^r : \mathbf{E}_n \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E}_n)$$

est un quasi-isomorphisme. Ces morphismes définissent un morphisme de T-spectres commutatifs

$$\gamma'^r : \mathbf{E} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E})$$

qui est l'adjoint du morphisme composé

$$\gamma^r : \mathrm{S}^r(T)[-2r] \otimes \mathbf{E} \xrightarrow{\alpha^r} \mathrm{S}^r(\tau^{\leqslant 1}\Omega) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}\ .$$

6. Strictement parlant, ces deux théorèmes ne s'appliquent pas dans notre contexte car l'endofoncteur $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathcal{H}om}(T, -)$ ne commute pas aux colimites filtrantes. Mais, étant donné que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$ et que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, cette commutation aux colimites filtrantes est satisfaite après restriction aux k-feuilletages ayant des schémas sous-jacents noethériens et de dimension de Krull fini. Ainsi, dans la suite, nous ferons semblant que ce genre de problème ne se pose pas.

(Voir le début de la Sous-section 1.1 et notamment (7).)

Par construction, le quasi-isomorphisme niveau par niveau γ'^r est la composition de

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\lambda^r} \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T), \mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E}) \xrightarrow{\gamma^r} \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E}).$$

De plus, il est facile de voir que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T), \mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E}) \arrow[r, "\gamma^r"] \arrow[d] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E}) \arrow[d, "\gamma'^s"] \\
\mathbf{E} \arrow[ur, "\lambda^r"] \arrow[r, "\lambda^{r+s}"] \arrow[urr, bend left, "\gamma'^r"] \arrow[rr, bend right, "\gamma'^{r+s}"'] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^{r+s}(T), \mathrm{S}^{r+s}(T) \otimes \mathbf{E}) \arrow[r, "\gamma^{r+s}"] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^{r+s}(T)[2r-2s], \mathbf{E})
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $r, s \in \mathbb{N}$.

Étant donné que $\mathbf{E}$ est $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant niveau par niveau, le morphisme $\gamma^r : \mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ admet une factorisation (unique à homotopie près)

$$\mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{E}.$$

D'autre part, étant donné que $\mathbf{E}$ est $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-localement équivalent à un $\Sigma^\infty_T(M)$, il existe un quasi-isomorphisme niveau par niveau de T-spectres commutatifs

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E}) \simeq \mathrm{s}^{\circ r}_{-}(\mathbf{E}).$$

De plus, la composition de

$$\mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\mathrm{S}^r(T) \otimes \mathbf{E}) \simeq \mathrm{s}^{\circ r}_{-}(\mathbf{E})$$

s'identifie (à homotopie près) au morphisme obtenu en composant r fois le morphisme de [**16**, Lemma 5.6]. Ainsi, en posant comme dans [**16**, Construction 5.13],

$$\widetilde{\mathbf{\Lambda}}^r(-) = \mathrm{s}^{\circ r}_{-}\underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T), -),$$

on trouve une factorisation

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[r, "\widetilde{\lambda}^r"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma'^r", "\text{q.-i.}"'] & \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^r(\mathbf{E}) \arrow[r] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E})
\end{tikzcd}$$

et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^r(\mathbf{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E}) \arrow[d, "\gamma'^s", "\text{q.-i.}"'] \\
\mathbf{E} \arrow[ur, "\widetilde{\lambda}^r"] \arrow[r, "\widetilde{\lambda}^{r+s}"] \arrow[urr, bend left, "\gamma'^r", "\text{q.-i.}"'] \arrow[rr, bend right, "\gamma'^{r+s}"', "\text{q.-i.}"] & \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{r+s}(\mathbf{E}) \arrow[r] & \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^{r+s}(T)[2r-2s], \mathbf{E}).
\end{tikzcd}$$

On peut donc passer à la colimite suivant $r \in \mathbb{N}$ comme dans [**16**, Construction 5.15] et obtenir une factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "\widetilde{\lambda}^{\infty}"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma'^{\infty}", "\text{q.-i.}"'] & \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{\infty}(\mathbf{E}) \arrow[r] & \operatorname*{colim}_{r\in\mathbb{N}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{S}^r(T)[-2r], \mathbf{E}). \end{tikzcd}$$

On a ainsi montré que $\mathbf{E}$ est un facteur direct de $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{\infty}(\mathbf{E})$ à homotopie près. Par ailleurs, d'après [**16**, Theorem 5.16], $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{\infty}(\mathbf{E})$ est un Ω_T-spectre. (7) Il s'ensuit que $\mathbf{E}$ est aussi un Ω_T-spectre. Puisqu'il est $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant niveau par niveau, on déduit en fain de compte qu'il est stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant comme souhaité. ■

Comme conséquence du Théorème 1.39, on obtient un « cancellation theorem » pour la structure de modèles $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-locale.

Corollaire 1.40. — *Supposons que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$ et soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(M) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T, \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T \otimes M))$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$. (8)

Démonstration. — En effet, d'après le Théorème 1.39, le T-spectre $\left\{\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes n} \otimes M)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un Ω_T-spectre. En particulier, l'adjoint du morphisme d'assemblage

$$T \otimes \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(M) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T \otimes M)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\tau}(S/\mathcal{E}; \Lambda)$ comme souhaité. ■

On continue dans la même veine en démontrant le résultat frappant suivant.

Théorème 1.41. — *Supposons que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule et considérons le T-spectre* $\mathbf{M}$ *associé à M comme dans la Construction 1.5.* (9) *On suppose que M est projectivement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. Alors, le morphisme évident*

$$\Sigma^{\infty}_T(M) \longrightarrow \mathbf{M}$$

fait de $\mathbf{M}$ *un remplacement stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant de $\Sigma^{\infty}_T(M)$. En fait, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\Sigma^{\infty}_T(M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\Sigma^{\infty}_T(M)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}$$

dans la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale instable.

Démonstration. — Le fait que le morphisme évident $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\Sigma^{\infty}_T(M)) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\Sigma^{\infty}_T(M))$ est un quasi-isomorphisme niveau par niveau est une conséquence directe du Théorème 1.39.

On pose $\mathbf{E} = \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(\Sigma^{\infty}_T(M))$. Nous allons montrer que le morphisme $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{M}$ est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Comme dans la preuve du Théorème 1.39, on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "\gamma'^r"] \arrow[d] & \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r}[-2r], \mathbf{E}) \arrow[d] \\ \mathbf{M} \arrow[r, "\gamma'^r"] & \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r}[-2r], \mathbf{M}) \end{tikzcd}$$

7. Strictement parlant, ce théorème ne s'applique pas dans notre contexte car l'endofoncteur $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathcal{H}om}(T, -)$ ne commute pas aux colimites filtrantes. Mais, étant donné que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$ et que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, cette commutation aux colimites filtrantes est satisfaite après restriction aux k-feuilletages ayant des schémas sous-jacents noethériens et de dimension de Krull fini. Ainsi, dans la suite, nous ferons semblant que ce genre de problème ne se pose pas.

8. À ce stade, on ignore si ce résultat vaut aussi pour $\tau = \psi\text{-}ft$!

9. Il faut rédiger cette construction dans un cadre plus général, celui des $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules et avec $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$.

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes niveau par niveau. Au niveau r, ce carré prend la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes r}\otimes M) & \xrightarrow[\text{q.-i.}]{\gamma'^r} & \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes r}\otimes M))[-2r] \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma^r} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^r} \\ M[2r] & \xrightarrow[\text{q.-i.}]{\gamma'^r} & \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},M). \end{array}$$

Nous allons montrer que la flèche verticale de droite est un quasi-isomorphisme ; ceci entraînera alors que

$$\gamma^r : \mathbf{E}_r = \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes r}\otimes M) \longrightarrow M[2r] = \mathbf{M}_r$$

est un quasi-isomorphisme et permettra de conclure.

Pour montrer que la flèche verticale de droite dans la carré précédent est un quasi-isomorphisme, on remarque que la composition de

$$M[-2r] \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes r}\otimes M))[-2r] \xrightarrow{\gamma'^r} \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},M)$$

coïncide avec le morphisme $\gamma'^r : M[-2r] \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},M)$ qui est un quasi-isomorphisme d'après le Théorème 1.38. D'autre part, le Corollaire 1.40 et le fait que M est $(\overline{\mathbb{X}},\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrant entraîne que le morphisme

$$M[-2r] \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T^{\otimes r},\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\tau}_{\overline{\mathbb{X}}}(T^{\otimes r}\otimes M))[-2r]$$

est un quasi-isomorphisme. Ceci termine la preuve du théorème. ■

On termine avec le théorème suivant.

Théorème 1.42. — *Soit M un complexe de préfaisceaux de $\mathcal{O}^\delta$-modules sur* $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/S$. *On suppose que M est projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant et on note $\mathbf{M} = \{M[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ le T-spectre associé à M comme dans la Construction 1.5. Alors,* $\mathbf{M}$ *est projectivement stablement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant et il existe un isomorphisme canonique dans* $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda)$ *:*

$$\mathrm{Loc}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(\Sigma^\infty_T(M)) \simeq \mathbf{M}.$$

Démonstration. — L'assertion que $\mathbf{M}$ est stablement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant est mise pour mémoire ; c'est le contenu du Théorème 1.7.

Les hypothèses de l'énoncé entraînent que M est un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule qui est $(\mathbb{A}^1,\psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrant. On peut alors lui appliquer le Théorème 1.41 qui nous dit en particulier que le morphisme $\Sigma^\infty_T(M) \longrightarrow \mathbf{M}$ est une équivalence $(\overline{\mathbb{X}},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable. C'est donc aussi une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-locale stable (d'après le Lemme 1.29). Puisque $\mathbf{M}$ est stablement $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ft)$-fibrant, ceci permet de conclure. ■

Corollaire 1.43. — *Le motif feuilleté*

$$\mathrm{Loc}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(\Sigma^\infty_T(\mathcal{O}^\delta)) \quad\in\quad \mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ft}(S/\mathcal{E};\Lambda)$$

représente la cohomologie de de Rham, i.e., il est isomorphe au T-spectre $\mathbf{\Omega} = \{\Omega^\bullet_\dagger[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. — En effet, on peut appliquer le Théorème 1.42 à $M = \Omega^\bullet_\dagger$ pour obtenir un isomorphisme

$$\mathrm{Loc}^{\psi\text{-}ft}_{\mathbb{P}^{1,\delta}}(\Sigma^\infty_T(\Omega^\bullet_\dagger)) \simeq \mathbf{\Omega}.$$

On utilise ensuite que le morphisme $\mathcal{O}^\delta \longrightarrow \Omega^\bullet_\dagger$ est une équivalence ψ-ft-locale. ■

1.4. Un modèle de la $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation, I. Le cas sans topologie. —

Dans cette sous-section, nous allons construire un modèle explicite du foncteur de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation pour les complexes de préfaisceaux sur SmFol/k tout en négligeant les topologies. (Plus tard, dans la Sous-section 1.5, nous expliquerons comment incorporer les topologies étale et ψ-étale.) On commence par une discussion dans un cadre général. On introduit la suituation suivante.

Situation 1.44. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit F un endofoncteur de $\mathcal{C}$ muni de deux transformations naturelles

$$p : F \longrightarrow \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad s : \mathrm{id} \longrightarrow F$$

telles que $p \circ s$ est l'identité du foncteur identité. On suppose que F admet un adjoint à droite G et on note

$$p' : \mathrm{id} \longrightarrow G \qquad \text{et} \qquad s' : G \longrightarrow \mathrm{id}$$

les transformations naturelles déduites de p et s par adjonction. Clairement, $s' \circ p'$ est l'identité du foncteur identité. □

Notation 1.45. — On considère l'endofoncteur $\Phi = F \circ G$ de $\mathcal{C}$. La counité de l'adjonction (F, G) fournit une transformation naturelle $\delta : \Phi \longrightarrow \mathrm{id}$. Par ailleurs, on a deux carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} F \circ G \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "p"] & F \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "s'"] & \mathrm{id} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{id} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p'"] & F \arrow[d, "p'"] \\ G \arrow[r, "s"] & F \circ G \end{tikzcd}$$

qui définissent deux transformations naturelles $\alpha : \Phi \longrightarrow \mathrm{id}$ et $\theta : \mathrm{id} \longrightarrow \Phi$ telles que $\theta \circ \alpha$ est l'identité du foncteur identité. □

Lemme 1.46. — *Dans la Situation 1.44, les trois propriétés suivantes pour $A \in \mathcal{C}$ sont équivalentes.*

(a) Le morphisme $p'_A : A \longrightarrow G(A)$ est un isomorphisme.
(b) Le morphisme $s'_A : G(A) \longrightarrow A$ est un isomorphisme.
(c) Les deux morphismes $\alpha_A : \Phi(A) \longrightarrow A$ et $\delta_A : \Phi(A) \longrightarrow A$ sont égaux.

*Lorsque ces propriétés sont satisfaites, nous dirons que A est F-*invariant. [10]

Démonstration. — L'équivalence (a)⇔(b) découle du fait que $s'_A \circ p'_A$ est l'identité de A. Supposons maintenant que p'_A et s'_A sont des isomorphismes. Alors, $p'_A \circ s'_A$ est l'identité de $G(A)$. Or, le morphisme α_A est égal à la composition de

$$F \circ G(A) \xrightarrow{p'_A \circ s'_A} F \circ G(A) \xrightarrow{\delta_A} A,$$

ce qui montre bien que (a) et (b) entraînent (c).

Réciproquement, supposons que la propriété (c) est satisfaite. Considérons la composition de

$$G(A) \xrightarrow{\eta_{G(A)}} G \circ F \circ G(A) \xrightarrow{G(\alpha_A)} G(A).$$

D'une part, par le construction de α, cette composition est égale à $p'_A \circ s'_A$. D'autre part, puisque $\alpha_A = \delta_A$, cette composition est l'identité de $G(A)$. On a donc montré que $p'_A \circ s'_A = \mathrm{id}_{G(A)}$. Puisque $s'_A \circ p'_A = \mathrm{id}_A$ les propriétés (a) et (b) sont alors satisfaites. ■

Lemme 1.47. — *Dans la Situation 1.44, on a les deux triangles commutatifs suivants*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, equal] & \Phi \arrow[d, "\delta"] \\ & \mathrm{id} \end{tikzcd} \qquad \textit{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{id} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, equal] & \Phi \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathrm{id}. \end{tikzcd}$$

10. Il est plus logique de parler ici de G-invariance mais nous utiliserons l'expression « F-invariant » par analogie avec le cas classique de la $\mathbb{A}^1$-invariance.

Démonstration. — Pour le premier triangle, on considère la composition de

$$\mathrm{id} \xrightarrow{s} F \xrightarrow{p'} F \circ G \xrightarrow{\delta} \mathrm{id},$$

et on utilise que la composition de deux dernières flèches est égale à $p : F \longrightarrow \mathrm{id}$ et que $p \circ s = \mathrm{id}$. La commutation du second triangle est claire par construction ; voir la Notation 1.45. ■

Construction 1.48. — On définit un objet cubique S^{Φ} dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$ de la manière suivante.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'endofoncteur S^{Φ}_n est donné par

$$\Phi^{\circ n} = \overbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}^{n \text{ fois}}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la transformation naturelle $\mathrm{p}^*_i : \mathrm{S}^{\Phi}_{n-1} \longrightarrow \mathrm{S}^{\Phi}_n$ est la composition de

$$\Phi^{\circ n-1} = \Phi^{\circ i-1} \circ \mathrm{id} \circ \Phi^{\circ n-i} \xrightarrow{\theta} \Phi^{\circ i-1} \circ \Phi \circ \Phi^{\circ n-i} = \Phi^{\circ n}.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n+1$, la transformation naturelle $\mathrm{d}^*_{i,0} : \mathrm{S}^{\Phi}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{S}^{\Phi}_n$ est la composition de

$$\Phi^{\circ n+1} = \Phi^{\circ i-1} \circ \Phi \circ \Phi^{\circ n-i+1} \xrightarrow{\alpha} \Phi^{\circ i-1} \circ \mathrm{id} \circ \Phi^{\circ n-i+1} = \Phi^{\circ n}.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n+1$, la transformation naturelle $\mathrm{d}^*_{i,1} : \mathrm{S}^{\Phi}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{S}^{\Phi}_n$ est la composition de

$$\Phi^{\circ n+1} = \Phi^{\circ i-1} \circ \Phi \circ \Phi^{\circ n-i+1} \xrightarrow{\delta} \Phi^{\circ i-1} \circ \mathrm{id} \circ \Phi^{\circ n-i+1} = \Phi^{\circ n}.$$

Le fait que les données ci-dessus définissent un objet cubique découle du Lemme 1.47. □

On continue dans la même veine avec le résultat suivant qui motive l'introduction de l'endofoncteur cubique S^{Φ}. (Pour la définition du complexe simple associé à un objet cubique et notamment pour les conventions de signes qui seront adoptées dans ce travail, nous renvoyons le lecteur à [**14**, Annexe A].)

Proposition 1.49. — *Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive karoubienne, et que les endofoncteurs F et G sont additifs. Soit $A \in \mathcal{C}$ et considérons le complexe simple $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A))$ associé à l'objet cubique $\mathrm{S}^{\Phi}(A)$. Alors, les deux morphismes de complexes*

$$\alpha : \Phi(\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A))) \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A)) \qquad \textit{et} \qquad \delta : \Phi(\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A))) \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A))$$

sont homotopes. La même conclusion vaut aussi pour « $\mathrm{C}^\sharp_\bullet$ » au lieu de « $\mathrm{C}_\bullet$ » (voir le début de [**14**, §A.1]*).*

Démonstration. — Le complexe $\Phi(\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^{\Phi}(A)))$ s'identifie canoniquement au complexe simple associé à l'objet cubique $\mathrm{S}^{\Phi}_{1+\bullet}(A)$. De plus, modulo cette identification, les deux morphismes α et δ de l'énoncé s'identifient aux morphismes induits sur les complexes simples par les morphismes d'objets cubiques

$$\mathrm{d}^*_{1,0} : \mathrm{S}^{\Phi}_{1+\bullet}(A) \longrightarrow \mathrm{S}^{\Phi}_\bullet(A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}^*_{1,1} : \mathrm{S}^{\Phi}_{1+\bullet}(A) \longrightarrow \mathrm{S}^{\Phi}_\bullet(A).$$

Le résultat recherché découle ainsi du Lemme 1.50 ci-dessous. ■

Lemme 1.50. — *Soit $A_\bullet$ un objet cubique à valeurs dans une catégorie additive. Alors, les morphismes $\mathrm{d}^*_{1,\epsilon} : \mathrm{C}(A_{1+\bullet}) \longrightarrow \mathrm{C}(A_\bullet)$, pour $\epsilon \in \{0,1\}$, sont homotopes. La même conclusion vaut aussi pour « $\mathrm{C}^\sharp_\bullet$ » au lieu de « $\mathrm{C}_\bullet$ ».*

Corollaire 1.51. — *Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, et que les foncteurs F et G sont exacts. Alors, les objets $\mathrm{H}_i(\mathrm{C}(\mathrm{S}^{\Phi}(A)))$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont F-invariants (au sens du Lemme 1.46).*

Démonstration. — D'après la Proposition 1.49, les deux flèches

$$\alpha, \delta : \mathrm{H}_i(\Phi(\mathrm{C}(\mathrm{S}^{\Phi}(A)))) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\mathrm{C}(\mathrm{S}^{\Phi}(A)))$$

sont égales. Puisque Φ est exact, on a $\Phi \circ \mathrm{H}_i = \mathrm{H}_i \circ \Phi$. Ceci montre que l'objet $\mathrm{H}_i(\mathrm{C}(\mathrm{S}^{\Phi}(A)))$ vérifie la propriété (c) du Lemme 1.46 comme souhaité. ■

On aura également besoin du résultat suivant.

Proposition 1.52. — *Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive karoubienne, et que les endofoncteurs F et G sont additifs. Soit $A \in \mathcal{C}$. Alors, les deux morphismes de complexes*

$$\alpha : \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^\Phi(\Phi(A))) \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^\Phi(A)) \qquad et \qquad \delta : \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^\Phi(\Phi(A))) \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{S}^\Phi(A))$$

sont homotopes. La même conclusion vaut aussi pour « $\mathrm{C}^\sharp_\bullet$ » au lieu de « $\mathrm{C}_\bullet$ ».

Démonstration. — La preuve est analogue à celle de la Proposition 1.49. ∎

Corollaire 1.53. — *Reprenons les hypothèses de la Proposition 1.52. Alors, la composition de*

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A))) \xrightarrow{p} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A)) \xrightarrow{s} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$$

est homotope à l'identité de $\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$. Autrement dit, le morphisme

$$s : \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A)) \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$$

est un isomorphisme à homotopie près. La même conclusion vaut aussi pour « $\mathrm{C}^\sharp_\bullet$ » au lieu de « $\mathrm{C}_\bullet$ ».

Démonstration. — La composition de l'énoncé coïncide avec la composition de

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A))) \xrightarrow{\eta} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(FGF(A))) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$$

qui, grâce à la Proposition 1.52, est homotope à la composition de

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A))) \xrightarrow{\eta} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(FGF(A))) \xrightarrow{\delta} \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$$

qui vaut l'identité de $\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$. ∎

On continue avec le résultat suivant.

Proposition 1.54. — *Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, et que les endofoncteurs F et G sont additifs. Soit $A \in \mathcal{C}$ et supposons que A est F-invariant (au sens du Lemme 1.46). Alors, le morphisme évident*

$$A \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A))$$

est un isomorphisme à homotopie près.

Démonstration. — Puisque $p' : A \longrightarrow G(A)$ est un isomorphisme, la transformation naturelle $p' : \mathrm{id} \longrightarrow G$ induit des isomorphismes

$$\mathrm{C}^\sharp_{n-1}(\mathrm{S}^\Phi(F(A))) = \Phi^{\circ n-1} \circ F(A) \xrightarrow[\sim]{p'} \Phi^{\circ n-1} \circ F \circ G(A) = \mathrm{C}^\sharp_n(\mathrm{S}^\Phi(A)) \tag{29}$$

pour $n \geqslant 1$. Modulo cette identification, pour $n = 1$, les deux flèches $\mathrm{d}^*_{1,0}, \mathrm{d}^*_{1,1} : \mathrm{C}^\sharp_1(\mathrm{S}^\Phi(A)) \rightrightarrows \mathrm{C}^\sharp_0(\mathrm{S}^\Phi(A))$ coïncident avec la flèche $p : F(A) \longrightarrow A$. (Ceci découle aussitôt du fait que les deux compositions de

$$F \xrightarrow{p'} FG \overset{\alpha}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} \mathrm{id}$$

sont égales à $p : F \longrightarrow \mathrm{id}$.) En particulier, la différentielle $\mathrm{C}^\sharp_1(\mathrm{S}^\Phi(A)) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp_0(\mathrm{S}^\Phi(A))$ est nulle. Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, les deux flèches $\mathrm{d}^*_{n,0}, \mathrm{d}^*_{n,1} : \mathrm{C}^\sharp_n(\mathrm{S}^\Phi(A)) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp_{n-1}(\mathrm{S}^\Phi(A))$ coïncident, modulo l'identification (29), avec la flèche $p : \Phi^{\circ n-1} \circ F(A) \longrightarrow \Phi^{\circ n-1}(A)$. Ainsi, la différence $\mathrm{d}^*_{n,0} - \mathrm{d}^*_{n,1}$ ne contribue pas à la différentielle du complexe $\mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A))$. Par ailleurs, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $\epsilon \in \{0,1\}$, la flèche $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon} : \mathrm{C}^\sharp_n(\mathrm{S}^\Phi(A)) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp_{n-1}(\mathrm{S}^\Phi(A))$ coïncide, modulo l'identification (29), avec la flèche $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon} : \mathrm{C}^\sharp_{n-1}(\mathrm{S}^\Phi(F(A))) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp_{n-2}(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$. On obtient en fin de compte un isomorphisme de complexes

$$\mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))[1] \oplus A[0] \simeq \mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A)) \tag{30}$$

qui est donné par l'identité de A en degré zéro et par (29) en degrés strictement positifs.

Par ailleurs, d'après le Corollaire 1.53, le morphisme

$$s : \mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A)) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(F(A)))$$

est un isomorphisme à homotopie près. En combinant ceci avec l'isomorphisme (30), on obtient un isomorphisme à homotopie près
$$\mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A))[1] \oplus A[0] \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A))$$
qui est donné par l'identité de A en degré zéro et par le morphisme
$$\mathrm{p}_n^* : \Phi^{\circ n-1}(A) \longrightarrow \Phi^{n-1} \circ F \circ G(A) = \Phi^{\circ n}(A)$$
en degré $n \geqslant 1$. Par la construction du complexe simple associé à un objet cubique, la composition de
$$\mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A))[1] \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp(\mathrm{S}^\Phi(A)) \twoheadrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A)).$$
est nulle. Il s'ensuit que le morphisme
$$A[0] \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A))$$
admet une section à homotopie près. Or, ce morphisme admet aussi une rétraction car $A[0]$ est un facteur direct de $\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(A))$. Ceci termine la preuve de la proposition. ■

À présent, on applique les considérations précédentes au cas qui nous intéresse.

Construction 1.55. — On peut spécialiser la Situation 1.44 de la manière suivante :
- $\mathcal{C} = \mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)$;
- $F(-) = \mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes (-)$ et $G(-) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k, -)$;
- $p : \mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes (-) \longrightarrow (-)$ la transformation naturelle induite par la projection $p : \mathbb{P}^{1,\delta}_k \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$;
- $s : (-) \longrightarrow \mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes (-)$ la transformation naturelle induite par la section $s_\infty : \mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^{1,\delta}_k$.

Ainsi, $\Phi = \mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k, -)$. Étant donné un complexe de préfaisceaux de Λ-module L, on pose alors
$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) = \mathrm{Tot}\,\mathrm{C}(\mathrm{S}^\Phi(L)).$$
On obtient alors un endofoncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda))$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$. □

Théorème 1.56. — *Soit L un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k. *Alors, les préfaisceaux d'homologie de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ sont $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariants. De plus, le morphisme $L \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est une équivalence $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locale. Autrement dit, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ est un foncteur de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation sur les complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k.

Démonstration. — La $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariance des préfaisceaux d'homologie du complexe $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ découle immédiatement du Corollaire 1.51. (Remarquer en effet que les endofoncteurs $\mathbb{P}^{1,\delta}_k \otimes -$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k, -)$ sont exacts.) Il reste donc à montrer que $L \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est une équivalence $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locale.

Pour ce faire, on fixe une équivalence $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locale $a : L \longrightarrow K$ avec K un complexe de préfaisceaux projectivement $\mathbb{P}^{1,\delta}$-fibrant. On sait que Cône(a) appartient à la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda))$ stable par sommes directes arbitraires et contenant les objets de la forme $(\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes H$ avec H un complexe de préfaisceaux sur SmFol/k. Or, d'après le Corollaire 1.53, le complexe de préfaisceaux $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}((\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes H)$ est acyclique. Puisque $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ commute aux sommes infinies et préserve les quasi-isomorphismes, il s'ensuit que le morphisme
$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(a) : \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K)$$
est un quasi-isomorphisme. En considérant le carré commutatif
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) \arrow[d, "\text{q.-i.}"] \\ K \arrow[r] & \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K), \end{tikzcd}$$
on voit qu'il est suffisant de montrer que le morphisme $K \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K)$ est une équivalence $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locale. En fait, ce morphisme est même un quasi-isomorphisme. En effet, par un argument de suite spectrale, on se ramène à montrer que le morphisme $\mathrm{H}_i(K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(\mathrm{H}_i(K))$ est un quasi-isomorphisme. Or, étant donné que K est projectivement $\mathbb{P}^{1,\delta}$-fibrant, les préfaisceaux $\mathrm{H}_i(K)$ sont $\mathbb{P}^{1,\delta}$-invariants. La Proposition 1.54 permet maintenant de conclure. ■

1.5. Un modèle de la $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation, II. Le cas local pour une topologie. —

Malheureusement, le Théorème 1.56 ne suffira pas dans la suite car il ne prend pas en compte les topologies que nous sommes amenés à considérer sur SmFol/k. Notre objectif dans cette sous-section est de développer une variante du Théorème 1.56 locale pour les topologies étale et ψ-étale. (Malheureusement, le cas de la topologie ψ-feuilletée doit être écarté pour des raisons de dimension cohomologique.) Une source de complication vient du fait que l'endofoncteur $\Phi = (\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty), -)$, qui est une composition d'un adjoint à gauche et d'un adjoint à droite, ne préserve pas les objets topologiquement fibrants. Pour les besoins de la $\overline{\mathbb{X}}$-localisation (voir la Sous-section 1.6), nous considérons un situation un peu plus générale.

Situation 1.57. — Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ des catégories de modèles stables obtenues par localisation de Bousfield à partir de catégories de complexes de préfaisceaux. Soit $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un foncteur de Quillen à gauche et soit $G : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ son adjoint à droite. On suppose que G commute aux colimites filtrantes et que les colimites filtrantes préservent les objets fibrants de $\mathfrak{D}$.

On suppose que $\mathfrak{D}$ est munie d'une monade « remplacement fibrant » R (i.e., R est une monade telle que $R(A)$ est fibrant et $A \longrightarrow R(A)$ est une équivalence faible pour tout $A \in \mathfrak{D}$). Comme d'habitude, on note $u : \mathrm{id} \longrightarrow R$ et $m : R \circ R \longrightarrow R$ l'unité et la multiplication de R.

On suppose aussi que $\mathfrak{C}$ est munie d'une comonade Q vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $B \in \mathfrak{C}$, la counité $Q(A) \longrightarrow A$ est une équivalence faible dans $\mathfrak{C}$;
- pour tout $B \in \mathfrak{C}$, le morphisme $\mathrm{L}F(Q(B)) \longrightarrow F(Q(B))$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$.

(Ainsi, si F préserve les équivalences faibles — et non seulement les équivalences faibles entre objets cofibrants —, on peut prendre $Q = \mathrm{id}$.) Comme d'habitude, on note $cu : Q \longrightarrow \mathrm{id}$ et $cm : Q \longrightarrow Q \circ Q$ la counité et la comultiplication de Q.

On forme alors l'endofoncteur $\Phi = F \circ Q \circ G$ de $\mathfrak{D}$ et on note $\delta : \Phi \longrightarrow \mathrm{id}$ et $\theta : \Phi \longrightarrow \Phi \circ \Phi$ les compositions de

$$F \circ Q \circ G \xrightarrow{cu} F \circ G \xrightarrow{\delta} \mathrm{id} \quad \text{et} \quad F \circ Q \circ G \xrightarrow{cm} F \circ Q \circ Q \circ G \xrightarrow{\eta} F \circ Q \circ G \circ F \circ Q \circ G.$$

Ces transformations naturelles font de Φ une comonade de $\mathfrak{D}$. On remarque aussi que $\Phi \circ R$ préserve les équivalences faibles et que l'endofoncteur de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$ qu'il induit n'est autre de $\mathrm{L}F \circ \mathrm{R}G$. □

Lemme 1.58. — *Dans la Situation 1.57, les deux propriétés suivantes pour $A \in \mathfrak{D}$ sont équivalentes.*

(a) L'objet $\mathrm{R}G(A)$ est nul dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{C})$.
(b) Le morphisme $\delta_{R(A)} : \Phi \circ R(A) \longrightarrow R(A)$ est nul dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$.

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, nous dirons que A est homotopiquement G-trivial.

Démonstration. — Si $\mathrm{R}G(A) = 0$ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{C})$, alors il en est de même de $\Phi \circ R(A) \simeq \mathrm{L}F \circ \mathrm{R}G(A)$. Ceci montre l'implication (a)⇒(b). Pour la réciproque, on utilise le fait que l'identité de $\mathrm{R}G(A)$ est égale à la composition de

$$\mathrm{R}G(A) \xrightarrow{\eta} \mathrm{R}G \circ \mathrm{L}F \circ \mathrm{R}G(A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{R}G(A)$$

et que la condition (b) entraîne que la seconde flèche est nulle puisqu'elle est isomorphe à la flèche $\mathrm{R}G(\delta_{R(A)}) : \mathrm{R}G(\Phi \circ R(A)) \longrightarrow \mathrm{R}G(R(A))$. ■

Construction 1.59. — Soit Ψ une comonade de $\mathfrak{D}$ (par exemple, $\Psi = \Phi$). On définit un objet simplicial augmenté T^{Ψ} dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathfrak{D}$ de la manière suivante.

(a) Pour $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$, l'endofoncteur $\mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}})$ est donné par

$$R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n+1} = (R \circ \Psi)^{\circ n+1} \circ R = \overbrace{R \circ \Psi \circ R \circ \cdots \circ R \circ \Psi \circ R}^{n+1 \text{ fois } \Psi}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant n$, la transformation naturelle $\mathrm{s}_i : \mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}}) \longrightarrow \mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}})$ est la composition de

$$\begin{array}{ccc} (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ \Psi \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i} & \xrightarrow{cm} & (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ \Psi \circ \Psi \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i} \\ & & \downarrow u \\ & & (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ \Psi \circ R \circ \Psi \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i}. \end{array}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant n$, la transformation naturelle $\mathrm{d}_i : \mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}}) \longrightarrow \mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}-\mathbf{1}})$ est la composition de

$$\begin{array}{ccc} (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ \Psi \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i} & \xrightarrow{cu} & (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i} \\ & & \downarrow m \\ & & (R \circ \Psi)^{\circ i} \circ R \circ (\Psi \circ R)^{\circ n-i}. \end{array}$$

Étant donné un objet $A \in \mathfrak{D}$, on note $\mathrm{T}^{\Psi}_{\bullet}(A)$ le complexe associé à l'objet simplicial augmenté $\mathrm{T}^{\Psi}(A)$. On rappelle que $\mathrm{T}^{\Psi}_n(A) = 0$ pour $n < 0$ et que $\mathrm{T}^{\Psi}_n(A) = \mathrm{T}^{\Psi}(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}})(A)$ pour $n \geqslant 0$. En fait, $\mathrm{T}^{\Psi}_{\bullet}(A)$ est un bicomplexe de préfaisceaux (voir la Situation 1.57) et on passera souvent au complexe total associé $\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Psi}(A))$. Par construction, on dispose d'une transformation naturelle $A \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Psi}(A))$. □

Proposition 1.60. — *Soit $A \in \mathfrak{D}$. Alors, la flèche*

$$\delta : \Phi \circ R(\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))) \longrightarrow R(\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A)))$$

est nulle dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$. *Autrement dit,* $\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))$ *est homotopiquement G-trivial au sens du Lemme 1.58.*

Démonstration. — Puisque les colimites filtrantes préservent les objets fibrants, on déduit que l'objet $\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))$ est fibrant. Il suffit donc de montrer que la flèche

$$\delta : \Phi(\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))$$

est nulle dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$. Le bicomplexe $R \circ \Phi(\mathrm{T}^{\Phi}_{\bullet}(A))$ s'identifie canoniquement au bicomplexe associé à l'objet simplicial augmenté $\mathrm{T}^{\Phi}(\underline{\mathbf{1}+\bullet})(A)$. On dispose donc de la flèche

$$\mathrm{d}_0 : R \circ \Phi(\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))$$

qui est nulle dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{C})$ d'après un analogue simplicial du Lemme 1.50. Or, il est facile de voir que $\delta = \mathrm{d}_0 \circ u$, ce qui permet de conclure. ■

On aura également besoin du résultat suivant.

Proposition 1.61. — *Soit $A \in \mathfrak{D}$. Alors, la flèche*

$$\delta : \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(\Phi \circ R(A))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(R(A)))$$

est nulle dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$.

Démonstration. — On se ramène à montrer que la flèche [11]

$$m \circ \delta : \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(\Phi \circ R(A))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A)),$$

obtenue en identifiant $\mathrm{T}^{\Phi}(\Phi \circ R(A))$ avec le bicomplexe associé à l'objet simplicial augmenté $\mathrm{T}^{\Phi}(\underline{\bullet+\mathbf{1}})(A)$, est nulle dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$. On utilise ensuite la variante « à droite » de la variante simpliciale augmentée du Lemme 1.50 pour conclure. ■

Corollaire 1.62. — *Soit $B \in \mathfrak{C}$. Alors, l'objet*

$$\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(F \circ Q(B)))$$

est nul dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$.

Démonstration. — L'identité de $\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(F \circ Q(B)))$ est la composition de

$$\mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(F \circ Q(B))) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(\Phi \circ R \circ F \circ Q(B))) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(F \circ Q(B)))$$

qui est nulle d'après la Proposition 1.61. ■

11. Il manque des signes quelque part ?

On continue avec le résultat suivant.

Proposition 1.63. — *Soit $A \in \mathfrak{D}$ et supposons que A est homotopiquement G-trivial (au sens du Lemme 1.58). Alors, le morphisme évident*
$$A \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(A))$$
est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$.

Démonstration. — En degré zéro, le bicomplexe $\mathrm{T}^{\Phi}_{\bullet}(A)$ est donné par $R(A)$ et en degré $n > 0$, il est donné par $R \circ (\Phi \circ R)^{\circ n}(A)$. Ainsi, lorsque A est homotopiquement G-trivial, $\mathrm{T}^{\Phi}_{n}(A)$ est nul dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{D})$ pour tout $n > 0$. Ceci permet de conclure. ■

À présent, on applique les considérations précédentes au cas qui nous intéresse.

Construction 1.64. — On suppose que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ft\}$. On peut spécialiser la Situation 1.57 de la manière suivante :

- $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \Lambda))$ munie de la structure projective τ-locale ;
- $R(-)$ est la monade « résolution de Godement » relativement à la topologie τ associée à un choix d'une famille conservative de points du topos $\mathbf{Shv}_{\tau}(\mathrm{SmFol}/k)$;
- $Q = \mathrm{id}$;
- $F(-) = (\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes (-)$ et $G(-) = \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty), -)$.

Ainsi, $\Phi = (\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty), -)$. Étant donné un complexe de préfaisceaux de Λ-modules L, on pose alors
$$\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) = \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^{\Phi}(L)).$$
On obtient ainsi un endofoncteur $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \Lambda))$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$. (On fera attention que $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ n'est pas le foncteur dérivé de l'endofoncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ introduit dans la Construction 1.55.) □

Théorème 1.65. — *On suppose que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. Soit L un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k. *Alors,* $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ *est $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-fibrant et le morphisme $L \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-locale. Autrement dit, $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ est un foncteur de $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-localisation sur les complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k.

Démonstration. — Les colimites filtrantes préservent les objets τ-fibrants puisque $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. (Bien entendu, il faut se restreindre aux k-feuilletages à schéma sous-jacent noethérien et de dimension de Krull finie.) Ceci montre en particulier que $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est τ-fibrant. Le fait qu'il est $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-fibrant découle aussitôt de la Proposition 1.60.

Il reste à montrer que $L \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-locale. Pour ce faire, on fixe une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-locale $a : L \longrightarrow K$ avec K un complexe de préfaisceaux projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-fibrant. On sait que $\mathrm{Cône}(a)$ est dans la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{Ho}_{\tau}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \Lambda)))$ stable par sommes directes arbitraires et contenant les objets de la forme $(\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes H$ avec H un complexe de préfaisceaux sur SmFol/k. Or, d'après le Corollaire 1.53, $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}((\mathbb{P}^{1,\delta}_k, \infty) \otimes H)$ est acyclique. Puisque $\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ commute aux sommes infinies et transforme les équivalences τ-locales en des quasi-isomorphismes, il s'ensuit que le morphisme
$$\mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(a) : \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K)$$
est un quasi-isomorphisme. En considérant le carré commutatif
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L) \arrow[d, "\text{q.-i.}"] \\ K \arrow[r] & \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K), \end{tikzcd}$$
on voit qu'il est suffisant de montrer que le morphisme $K \longrightarrow \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(K)$ est une équivalence $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \tau)$-locale. En fait, ce morphisme est même une équivalence τ-locale d'après la Proposition 1.63. ■

Théorème 1.66. — *On suppose que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. Soit L un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k. *Alors, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est projectivement $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant et le morphisme $L \longrightarrow \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{R}_{\tau}\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(L)$ est* *une équivalence* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$*-locale. Autrement dit,* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}\circ \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ *est un foncteur de* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$*-localisation sur les complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k.

Démonstration. — C'est la conjonction des Théorèmes **??** et 1.65. ∎

Théorème 1.67. — *On suppose que* $\tau\in\{\acute{e}t,\psi\text{-}\acute{e}t\}$*. Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre de complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k*. Alors,* $\mathbf{\Lambda}^\infty\circ\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}\circ \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(\mathbf{E})$ *est un* T*-spectre projectivement stablement* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$*-fibrant et le morphisme* $\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{\Lambda}^\infty\circ\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}\circ \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}(\mathbf{E})$ *est une équivalence* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$*-locale stable. Autrement dit,* $\mathbf{\Lambda}^\infty\circ\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}\circ \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\delta\text{-}\mathbb{P}}$ *est un foncteur de* $(\mathbb{P}^{1,\delta},\mathbb{A}^1,\tau)$*-localisation stable sur les* T*-spectres de complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k.

Démonstration. — C'est la conjonction du Corollaire **??** et du Théorème 1.65. ∎

1.6. Un modèle de la $\overline{\mathbb{X}}$-localisation. —

Dans cette section, nous allons adapter la construction des foncteurs de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation (voir la Sous-section 1.5) pour obtenir un foncteur de $\overline{\mathbb{X}}$-localisation. Le point clef, est la caractérisation suivante des objets $\overline{\mathbb{X}}$-locaux dans $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)$.

Théorème 1.68. — *Appelons* $p:\mathbb{A}^1_k\longrightarrow\mathrm{Spec}(k)$ *et* $t:\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{A}^1_k$ *les projections évidentes. Soit* $M\in\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)$*. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) M est $\overline{\mathbb{X}}$*-local, i.e., pour tout carré cartésien de k-feuilletages différentiellement lisses*

$$\begin{array}{ccc} Y/\mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \\ \big\downarrow{\scriptstyle s} & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\ X/\mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1_k, \end{array} \tag{31}$$

les morphismes

$$s^*:\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(Y/\mathcal{G})(m)[n],M) \tag{32}$$

sont bijectifs (pour tout m, $n\in\mathbb{Z}$*).*

(b) M vérifie la conclusion de (a) pour tous les carrés cartésiens (31) *tels que f est différentiellement lisse.*

(c) Le morphisme suivant de $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)$

$$p^*M\longrightarrow t_*t^*p^*M$$

est un isomorphisme.

(d) L'objet suivant de $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)$

$$\underline{\mathrm{Hom}}((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E},\infty_{\mathbb{A}^1_k}),p^*(M))$$

est nul.

Démonstration. — Les implications suivantes sont tautologiques : (a)⇒(b)⇔(c)⇔(d). En effet, (b) est un cas particulier de (a). Pour l'équivalence (b)⇔(c) on utilise le critère suivant. Un morphisme dans $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)$ est un isomorphisme si et seulement si il induit des bijections lorsqu'on lui applique $\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],-)$ pour tout m, $n\in\mathbb{Z}$ et tout $X/\mathcal{F}\in\mathrm{SmFol}/\mathbb{A}^1_k$. Or, grâce aux adjonctions $(p_\sharp,p^*)$ et $(p_\sharp t_\sharp t^*,t_*t^*p^*)$, on a les identifications suivantes

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],p^*M)\ \simeq\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],M)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^1_k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],t_*t^*p^*M)\ \simeq\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(Y/\mathcal{G})(m)[n],M).$$

Enfin, pour l'équivalence (c)⇔(d), on remarque qu'on peut reformuler (d) en demandant que la composition de

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E},p^*M)=t_*t^*p^*M\xrightarrow{\eta}t_*s_{\infty,*}s_\infty^*t^*p^*M\simeq p^*M,$$

avec $s_\infty : \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}$ la section à l'infinie, est inversible. Or, la composition de

$$p^*M \xrightarrow{\eta} t_*t^*p^*M \xrightarrow{\eta} t_*s_{\infty,*}s^*_\infty t^*p^*M \simeq p^*M$$

est l'identité de p^*M, ce qui permet de conclure.

Il reste donc à démontrer l'implication (c)⇒(a). Donnons-nous un carré cartésien (31). D'après le Lemme 1.69 ci-dessous, le morphisme de changement de base

$$\mathrm{Ex}^*_* : f^*t_* \longrightarrow s_*g^*$$

est un isomorphisme. Ainsi, la condition (c) entraîne que le morphisme

$$f^*p^*M \longrightarrow s_*s^*f^*p^*M \tag{33}$$

est un isomorphisme. Grâce aux adjonctions $((p\circ f)_\sharp,(p\circ f)^*)$ et $((p\circ f)_\sharp s_\sharp s^*, s_*s^*(p\circ f)^*)$, on a les identifications suivantes

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(X/\mathcal{F};\Lambda)}(\Lambda(m)[n],(p\circ f)^*M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F})(m)[n],M)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(X/\mathcal{F};\Lambda)}(\Lambda(m)[n],s_*s^*(p\circ f)^*M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(Y/\mathcal{G})(m)[n],M).$$

Ainsi, en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(X/\mathcal{F};\Lambda)}(\Lambda(m)[n],-)$ à l'isomorphisme (33), on trouve l'homomorphisme (32). Ce dernier est donc bijectif comme souhaité. ∎

Lemme 1.69. — *Étant donné un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} Y/\mathcal{G} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "t"] \\ X/\mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1_k, \end{tikzcd}$$

le morphisme de changement de base

$$\mathrm{Ex}^*_* : f^*t_* \longrightarrow s_*g^*,$$

entre opérations dans $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-ét}}(-;\Lambda)$*, est un isomorphisme.*

Démonstration. — On peut factoriser le carré de l'énoncé en deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} Y/\mathcal{G} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"] & \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \arrow[d, "\iota"] \\ \mathbb{P}^1_k \times_k (X/\mathcal{F}) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "s'"] & \mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "t'"] \\ X/\mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd}$$

où les flèches ι sont données par les morphismes identités sur les k-schémas sous-jacents. Il est donc suffisant de traiter le cas des morphismes d'échange

$$\mathrm{Ex}^*_* : f^*t'_* \longrightarrow s'_*g'^* \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ex}^*_* : g'^*\iota_* \longrightarrow \iota_*g^*.$$

Le premier morphisme d'échange est inversible d'après le Théorème **??**. Le second morphisme d'échange est inversible d'après la Proposition **??**. (En effet, le morphisme $f : X/\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ est une composition d'un morphisme différentiellement lisse — la projection $(X/\mathcal{F})\times_k \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ — et d'une immersion fermée pré-spéciale — l'immersion $(\mathrm{id},f) : X/\mathcal{F} \hookrightarrow (X/\mathcal{F})\times_k \mathbb{A}^1_k$ — et qui reste pré-spéciale après changement de base par $t : \overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$.) ∎

Remarque 1.70. — En posant $G = \underline{\mathrm{Hom}}((\overline{\mathbb{X}},\infty_{\mathbb{A}^1_k}),-)\circ p^*$, vue comme foncteur de Quillen à droite

$$G : \mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda))) \longrightarrow \mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/\mathbb{A}^1_k;\Lambda))),$$

la condition (d) affirme précisément que M est homotopiquement G-trivial au sens du Lemme 1.58. □

Motivé par le Théorème 1.68 et la Remarque 1.70, nous sommes amenés à considérer l'analogue suivant de la Construction 1.64.

Construction 1.71. — On peut spécialiser la Situation 1.57 de la manière suivante :

- $\mathfrak{C} = \mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/\mathbb{A}^1_k;\Lambda)))$ munie de sa structure projective $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable ;
- $\mathfrak{D} = \mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)))$ munie de sa structure projective $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable ;
- $R(-) = \mathbf{\Lambda}^\infty \circ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{God}$ où God est la monade « résolution de Godement » relativement à la topologie ψ-étale associée à un choix d'une famille conservative de points du topos $\mathbf{Shv}_{\psi\text{-}\acute{e}t}(\mathrm{SmFol}/k)$; [12]
- Q la comonade « résolution projective » des complexes de préfaisceaux appliquée niveau par niveau sur les T-spectres ;
- $F(-) = p_\sharp((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}) \otimes (-))$ et $G(-) = \underline{\mathrm{Hom}}((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}), p^*(-))$ avec $p : \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ la projection structurale.

Ainsi, on a

$$\Phi = p_\sharp\left((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}) \otimes Q\left(\underline{\mathrm{Hom}}\left((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}), p^*(-)\right)\right)\right).$$

Étant donné un T-spectre de complexes de préfaisceaux de Λ-modules $\mathbf{E}$, on pose alors

$$\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E}) = \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^\Phi(\mathbf{E})).$$

On obtient ainsi un endofoncteur $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ de $\mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k;\Lambda)))$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$. □

THÉORÈME 1.72. — *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre sur* SmFol/k*. Alors,* $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E})$ *est stablement* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$*-fibrant et le morphisme* $\mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E})$ *est une équivalence* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$*-locale stable. Autrement dit,* $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ *est un foncteur de* $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$*-localisation stable sur les* T*-spectres de complexes de préfaisceaux sur* SmFol/k.

Démonstration. — Les colimites filtrantes préservent les T-spectres stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrants. (Bien entendu, il faut se restreindre aux k-feuilletages à schéma sous-jacent noethérien et de dimension de Krull finie.) Ceci montre en particulier que $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E})$ est stablement $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrant. Le fait qu'il est stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrant découle aussitôt de la Proposition 1.60 et du Théorème 1.68 (voir la Remarque 1.70).

Il reste à montrer que $\mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E})$ est une équivalence $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable. Pour ce faire, on fixe une équivalence $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable $a : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ avec $\mathbf{F}$ un T-spectre stablement $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrant. On sait que Cône(a) est dans la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)$ stable par sommes directes arbitraires et contenant les objets de la forme $\mathbf{L} = p_\sharp((\overline{\mathbb{X}}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}) \otimes \mathbf{H})$ avec $\mathbf{H}$ un T-spectre projectivement cofibrant sur $\mathrm{SmFol}/\mathbb{A}^1_k$. Or, d'après le Corollaire 1.53, $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{L})$ est acyclique. Puisque $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ commute aux sommes infinies et transforme les équivalences $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locales stables en des quasi-isomorphismes, il s'ensuit que le morphisme

$$\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(a) : \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{F})$$

est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. En considérant le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E}) \arrow[d, "\text{q.-i.}"] \\
\mathbf{F} \arrow[r] & \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{F}),
\end{tikzcd}$$

il est suffisant de montrer que le morphisme $\mathbf{F} \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{F})$ est une équivalence $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable. En fait, ce morphisme est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale stable d'après la Proposition 1.63. ■

12. **Il y a un problème ici ! Ce** $R(-)$ **n'est pas une monade !**

Au cas où cela s'avèrera utile dans la suite, nous introduisons une variante simplifiée de la Construction 1.71 où l'on travaille avec les structures ψ-*ét*-locales au lieu des structures $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locales stables.

Construction 1.73. — On suppose que $\tau \in \{ét, \psi\text{-}ét\}$. On peut spécialiser la Situation 1.57 de la manière suivante :

- $\mathfrak{C} = \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/\mathbb{A}^1_k; \Lambda))$ munie de sa structure projective τ-locale ;
- $\mathfrak{D} = \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \Lambda))$ munie de sa structure projective τ-locale ;
- $R(-)$ est la monade « résolution de Godement » relativement à la topologie τ associée à un choix d'une famille conservative de points du topos $\mathbf{Shv}_\tau(\mathrm{SmFol}/k)$;
- Q la comonade « résolution projective » des complexes de préfaisceaux ;
- $F(-) = p_\sharp((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}) \otimes (-))$ et $G(-) = \underline{\mathrm{Hom}}((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}), p^*(-))$ avec $p : \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ la projection structurale.

Ainsi, on a

$$\Phi = p_\sharp\left((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}) \otimes Q\left(\underline{\mathrm{Hom}}\left((\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E}, \infty_{\mathbb{A}^1_k}), p^*(-)\right)\right)\right).$$

Étant donné un complexe de préfaisceaux de Λ-modules L, on pose alors

$$\mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(L) = \mathrm{Tot}(\mathrm{T}^\Phi(L)).$$

On obtient ainsi un endofoncteur $\mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}/k; \Lambda))$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{R}_\tau\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$. Bien entendu, cet endofoncteur et cette transformation naturelle s'étendent aux T-spectres en les appliquant niveau par niveau. □

On a alors le résultat suivant.

Proposition 1.74. — *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre sur* SmFol/k*. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}ét}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}(\mathbf{E})$$

est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$*-locale stable. En particulier,* $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ *est un foncteur de* $\overline{\mathbb{X}}$*-localisation sur* $\mathbf{FolDA}^{\psi\text{-}ét}(k; \Lambda)$.

Démonstration. — On pose $R' = \mathbf{\Lambda}^\infty \circ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}} \circ R$ avec $R = \mathrm{God}$ le foncteur « résolution de Godement ». Notons T^Φ (resp. T'^Φ) l'objet simplicial augmenté de la Construction 1.73 (resp. la Construction 1.71) donnant lieu à l'endofoncteur $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ét}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ (resp. $\mathrm{R}_{\psi\text{-}ét-\mathbb{A}^1}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$). Il est suffisant de montrer que pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme

$$\mathrm{T}^\Phi_n(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{T}'^\Phi_n(\mathbf{E}) \tag{34}$$

est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locale stable. Nous raisonnerons par récurrence sur n. Lorsque $n = 0$, le morphisme (34) est donné par $R(\mathbf{E}) \longrightarrow R'(\mathbf{E})$ qui est clairement une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locale stable. Supposons que le résultat est connu pour un $n \geqslant 0$. Rappelons que

$$\mathrm{T}^\Phi_{n+1}(\mathbf{E}) \simeq R \circ \Phi \circ \mathrm{T}^\Phi_n(\mathbf{E}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}'^\Phi_{n+1}(\mathbf{E}) \simeq R' \circ \Phi \circ \mathrm{T}'^\Phi_n(\mathbf{E}).$$

Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$\Phi \circ \mathrm{T}^\Phi_n(\mathbf{E}) \longrightarrow \Phi \circ \mathrm{T}'^\Phi_n(\mathbf{E})$$

est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locale stable. Or, par construction, les deux T-spectres $\mathrm{T}^\Phi_n(\mathbf{E})$ et $\mathrm{T}'^\Phi_n(\mathbf{E})$ sont ψ-*ét*-fibrants niveau par niveau (le second est même stablement $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-fibrant). Il est donc suffisant de montrer que le foncteur Φ préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locales stables entre T-spectres ψ-*ét*-fibrants niveau par niveau. Ceci découle aussitôt du Lemme 1.75 ci-dessous. ■

Lemme 1.75. — *Soit* $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ *un morphisme de* k*-feuilletages. Alors, le foncteur* f_* *préserve les équivalences* $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$*-locales stables entre* T*-spectres* ψ*-ét-fibrants niveau par niveau.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-locale stable entre T-spectres ψ-*ét*-fibrants niveau par niveau. D'après le Corollaire **??**, les T-spectres $\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{E}))$ et $\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{F}))$ sont des remplacements stablement $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}ét)$-fibrants de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ respectivement. Il s'ensuit que le morphisme

$$\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{E})) \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{F}))$$

est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Or, le foncteur f_* préserve les quasi-isomorphismes niveau par niveau. Ainsi, le morphisme

$$f_*\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{E})) \longrightarrow f_*\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{F}))$$

est aussi un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Par ailleurs, il est facile de voir que le foncteur f_* commute aux endofoncteurs $\mathbf{\Lambda}^\infty$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}$. Ainsi, on a montré que dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
f_*(\mathbf{E}) \arrow[r] \arrow[d] & f_*(\mathbf{F}) \arrow[d] \\
\mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(f_*\mathbf{E})) \arrow[r] & \mathbf{\Lambda}^\infty(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(f_*\mathbf{F})),
\end{tikzcd}$$

la flèche horizontale inférieure est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Or, dans ce même carré, les flèches verticales sont des équivalences $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locales stables. Ceci permet de conclure. ■

1.7. Une construction intermédiaire entre la $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation et la $\overline{\mathbb{X}}$-localisation. —

Des problèmes de convergence de suites spectrales liés à l'infinitude de la dimension cohomologique de la topologie ψ-feuilletée détruisent tout espoir d'obtenir un modèle utilisable du foncteur de $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \psi\text{-}ft)$-localisation. Ceci nous a poussé à élargir le champ d'applicabilité de la méthode développée dans la Sous-section 1.1 initialement conçue pour un $\mathcal{O}^\delta$-module $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrant sur SmFol/k. Ainsi, nous avions introduit dans la Définition 1.27 les structures de modèles $\overline{\mathbb{X}}$-locales et nous avons montré que la méthode développée dans la Sous-section 1.1 s'applique également aux $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules qui sont $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrants. De plus, dans la Sous-section 1.6, nous avons construit un foncteur de $(\overline{\mathbb{X}}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-localisation stable $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$. Malheureusement, il s'est avéré que ce foncteur explicite de $\overline{\mathbb{X}}$-localisation est bien trop compliqué pour les besoins de la preuve de la conservativité. Le problème vient du fait que la construction de $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1-\psi\text{-}\acute{e}t}\underline{\mathrm{Sg}}^{\overline{\mathbb{X}}}$ fait intervenir les foncteurs $p_\sharp$, pour $p : \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ la projection structurale, ce qui, en principe, peut altérer d'une manière incontrôlable le taux de « divisibilité » par le motif de Tate effectif dans les niveaux des T-spectres.

Le but de cette sous-section est d'introduire un foncteur intermédiaire σ^{eff} entre le foncteur de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation et celui de $\overline{\mathbb{X}}$-localisation. Ce foncteur intermédiaire n'est pas attaché à une localisation de Bousfield. Toutefois, mis à part cet inconvénient, le foncteur σ^{eff} possède deux avantages qui s'avèreront cruciaux pour la suite. D'une part, il est tout aussi calculable que le foncteur de $\mathbb{P}^{1,\delta}$-localisation : il admet un modèle qui ne fait pas intervenir des foncteurs du type $p_\sharp$. D'autre part, la méthode développée dans la Sous-section 1.1 s'étend aussi aux $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules obtenus en appliquant le foncteur σ^{eff}. La vérification de cela fera l'objet de la Sous-section 1.8 ci-dessous.

On considère d'abord une situation, légèrement plus générale que nécessaire.

Situation 1.76. — Soit $(S/\mathcal{E}, I)$ un diagramme de k-feuilletages différentiellement lisses, i.e., I est une petite catégorie et $S/\mathcal{E} : I \longrightarrow \mathrm{SmFol}/k$ est un foncteur. Pour un objet $i \in I$, on note $S_i/\mathcal{E}_i$ le k-feuilletage associé. L'association $i \rightsquigarrow \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(S_i/\mathcal{E}_i)$ définit un préfaisceau $\mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(S/\mathcal{E})$ sur I. On suppose donné un sous-préfaisceau d'ensembles pointés $\omega \subset \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(S/\mathcal{E})$. Autrement dit, pour tout objet $i \in I$, on dispose d'un sous-ensemble de formes différentielles fermées ω_i sur $S_i/\mathcal{E}_i$ contenant la forme différentielle nulle et, pour toute flèche $j \longrightarrow i$ dans I, la composition avec le morphisme $S_j/\mathcal{E}_i \longrightarrow S_i/\mathcal{E}_j$ envoie ω_i dans ω_j. □

Remarque 1.77. — Le cas qui nous intéresse vraiment est celui du schéma cocubique $\mathbb{A}_k$ muni des ensembles de formes différentielles $\omega_n = \{0, \mathrm{d}t_1, \cdots, \mathrm{d}t_n\} \subset \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^n_k)$. □

On note $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S, I)$ la catégorie des feuilletages différentiellement lisses au-dessus du diagramme $(S/\mathcal{E}, I)$. Rappelons qu'un objet de cette catégorie est un couple $(X/\mathcal{F}, i)$ où i est un objet de I et $X/\mathcal{F}$ est un $S_i/\mathcal{E}_i$-feuilletage différentiellement lisse. Un morphisme $f : (Y/\mathcal{G}, j) \longrightarrow (X/\mathcal{F}, i)$ est la donnée d'une flèche $j \longrightarrow i$ dans I et d'un morphisme de feuilletages $f : Y/\mathcal{G} \longrightarrow X/\mathcal{F}$ faisant commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} Y/\mathcal{G} & \longrightarrow & X/\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_j/\mathcal{E}_j & \longrightarrow & S_i/\mathcal{E}_i. \end{array}$$

La catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S,I);\Lambda))$ des complexes de préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S,I)$ possède plusieures structures de modèles projectives (resp. semi-projective, injective) : la globale, la ψ-*ét*-locale et la $(\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ét)$-locale. Comme d'habitude, on note $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\psi\text{-}ét}((S/\mathcal{E},I);\Lambda)$ la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ét)$-locale.

Nous allons introduire une nouvelle localisation de Bousfield sur la catégorie des complexes de préfaisceaux sur $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S,I)$. Pour ce faire, nous aurons besoin de la notation suivante.

Notation 1.78. — Soit $X/\mathcal{F}$ un k-feuilletage différentiellement lisse. Rappelons que, si $\mathcal{M}$ un module différentiel sur $X/\mathcal{F}$, alors le k-schéma $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ admet une structure naturelle de $X/\mathcal{F}$-feuilletage différentiellement étale.[13] Étant donnée une forme différentielle fermée $\omega \in \mathrm{Z}_{\mathrm{dR}}(X/\mathcal{F})$, on dispose du module différentiel $\mathcal{E}_{X/\mathcal{F}}(\omega)$ librement engendré par la section $e^{\int\omega}$ et vérifiant l'équation différentielle

$$\nabla(e^{\int\omega}) = e^{\int\omega}\cdot\omega.$$

On pose alors

$$\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E}_{X/\mathcal{F}}(\omega))$$

muni de sa structure naturelle de $X/\mathcal{F}$-feuilletage différentiellement étale. Remarquons que le k-schéma sous-jacent à $\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega)$ est $\mathbb{P}^1_X$ et qu'il admet un recouvrement naturel

$$\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega) = \mathbb{A}^{1,+}_{X/\mathcal{F}}(\omega) \cup \mathbb{A}^{1,-}_{X/\mathcal{F}}(\omega)$$

où $\mathbb{A}^{1,+}_{X/\mathcal{F}}(\omega) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X[e^{\int\omega}])$ et $\mathbb{A}^{1,+}_{X/\mathcal{F}}(\omega) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X[e^{-\int\omega}])$. En particulier, la section nulle et la section à l'infini fournissent des morphismes de k-feuilletages $s_0,\ s_\infty : X/\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega)$. □

Définition 1.79. — *La* structure de modèles projective *(resp.* semi-projective, injective*)* $(\mathbb{P}^1(\omega),\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ét)$-locale *sur la catégorie* $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S,I);\Lambda))$ *est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. semi-projective, injective)* $(\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ét)$*-locale suivant la classe des morphismes*

$$(\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega),i)\otimes\Lambda[n] \longrightarrow (X/\mathcal{F},i)\otimes\Lambda[n]$$

avec $i\in I$, $\omega\in\omega_i$, $X/\mathcal{F}\in\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}_i}/S_i$ *et* $n\in\mathbb{Z}$.

Les équivalences faibles relativement à cette structure de modèles localisée sont appelées les équivalences $(\mathbb{P}^1(\omega),\mathbb{A}^1,\tau)$-locales *et leur classe est désignée par* $\mathbf{W}_{\mathbb{P}^1(\omega)-\mathbb{A}^1-\tau}$. *Les fibrations relativement à cette structure de modèles sont appelées les* $(\mathbb{P}^1(\omega),\mathbb{A}^1,\tau)$-fibrations projectives *(resp.* semi-projectives, injectives*) et leur classe est désignée par* $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^1(\omega)-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{proj}}$ *(resp.* $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^1(\omega)-\mathbb{A}^1-\tau-\text{s-pr}}$, $\mathbf{Fib}_{\mathbb{P}^1(\omega)-\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{inj}}$*)*.

Remarque 1.80. — Plus tard,[14] lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le sous-préfaisceau ω, on écrira « $\mathbb{P}^{1,\delta}$ » au lieu de « $\mathbb{P}^1(\omega)$ ». Bien entendu, derrière cet abus de language se trouve la volonté de considérer les structures $\mathbb{P}^1(\omega)$-locales comme étant les variantes relatives, au-dessus d'un diagramme de k-feuilletages, des structures $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locales. □

Lemme 1.81. — *Soit L un complexe de préfaisceaux (de Λ-modules) sur* $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S,I)$. *Alors, L est projectivement (resp. semi-projectivement, injectivement)* $(\mathbb{P}^1(\omega),\mathbb{A}^1,\psi\text{-}ét)$*-fibrant si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :*

(a) L est projectivement (resp. semi-projectivement, injectivement) ψ-ét-fibrant ;

13. Il faudrait peut-être expliquer cela dans un exemple quelque part avant...
14. Ce n'est pas sûr que c'est une bonne idée...

(b) pour tout $i \in I$ et tout $S_i/\mathcal{E}_i$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel

$$L(X/\mathcal{F}, i) \longrightarrow L(\mathbb{A}^1_X/\mathcal{F}, i)$$

est un quasi-isomorphisme ;

(c) pour tout $i \in I$, tout $\omega \in \omega_i$ et tout $S_i/\mathcal{E}_i$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$, le morphisme naturel

$$L(X/\mathcal{F}, i) \longrightarrow L(\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega), i)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Ceci découle du Lemme **??** et de la construction de la localisation de Bousfield. ∎

Définition 1.82. — *Soit $M \in \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ un motif feuilleté effectif. On dit que M est $\mathbb{P}^1(\omega)$-*local *si l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I);\Lambda)}(\mathrm{M}(X/\mathcal{F}, i)[n], M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I);\Lambda)}(\mathrm{M}(\mathbb{P}^1_{X/\mathcal{F}}(\omega), i)[n], M)$$

est bijective pour tout $i \in I$, tout $\omega \in \omega_i$, tout $S_i/\mathcal{E}_i$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, M est $\mathbb{P}^1(\omega)$-local si et seulement si un (et donc tout) remplacement $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-fibrant de M est un complexe de préfaisceaux $(\mathbb{P}^1(\omega), \mathbb{A}^1, \tau)$-fibrant. On note $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ formée des motifs $\mathbb{P}^1(\omega)$-locaux.

Lemme 1.83. — *L'inclusion $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ possède un adjoint à gauche*

$$\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)} : \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda). \tag{35}$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence de la construction de la localisation de Bousfield. ∎

Notation 1.84. — Par abus de language, on notera aussi $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}$ la composition de (35) avec l'inclusion de la sous-catégorie des motifs feuilletés effectifs $\mathbb{P}^1(\omega)$-locaux. Ainsi, $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}$ devient un endofoncteur de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}$. □

Pour $i \in I$, le foncteur évident $\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}_i}/S_i \longrightarrow \mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S, I)$, qui à un $S_i/\mathcal{E}_i$-feuilletage différentiellement lisse $X/\mathcal{F}$ associe le couple $(X/\mathcal{F}, i)$, induit une adjonction

$$i_\sharp : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}_i}/S_i; \Lambda)) \rightleftarrows \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmFol}^{\mathcal{E}}/(S, I); \Lambda)) : i^*. \tag{36}$$

(On fera attention que, contrairement à l'usage, i^* est le foncteur « image direct ».) On note le résultat suivant.

Lemme 1.85. — *L'adjonction* (36) *est de Quillen relativement à la structure $(\mathbb{P}^1(\omega_i), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale sur la catégorie source et la structure $(\mathbb{P}^1(\omega), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale sur la catégorie but. De plus, le foncteur i^* envoie une équivalence $(\mathbb{P}^1(\omega), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale sur une équivalence $(\mathbb{P}^1(\omega_i), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale ; il se dérive donc trivialement.*

Démonstration. — Clairement, l'adjonction (36) est de Quillen relativement aux structures projectives globales. Or, d'après le Lemme 1.81, le foncteur i^* préserve les objets fibrants relativement aux structures $(\mathbb{P}^1(-), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locales. Il est donc de Quillen à droite.

Remarquons maintenant que i^* est de Quillen à gauche relativement aux structures injectives globales et qu'il préserve les quasi-isomorphismes. En fait en adaptant [**12**, Théorèmes 4.5.10(3) et 4.5.14(3)], il est facile de voir que i^* est de Quillen à gauche relativement aux structures injectives $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locales. On affirme qu'il en est de même pour les structures $(\mathbb{P}(-), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locales. Pour montrer cela, on fixe $j \in I$, $\omega \in \omega_j$ et $Y/\mathcal{G}$ un $S_j/\mathcal{E}_j$-feuilletage différentiellement lisse. Nous devons montrer que i^* transforme le morphisme

$$(\mathbb{P}^1_{Y/\mathcal{G}}(\omega), j) \otimes \Lambda \longrightarrow (Y/\mathcal{G}, j) \otimes \Lambda$$

en une équivalence $(\mathbb{P}^1(\omega_i), \mathbb{A}^1, \psi\text{-}\acute{e}t)$-locale. Or, pour $Z/\mathcal{H}$ un $S_j/\mathcal{E}_j$-feuilletage différentiellement lisse, on a

$$i^*((Z/\mathcal{H}, j) \otimes \Lambda) = \bigoplus_{\alpha: i \to j} ((Z/\mathcal{H}) \times_{(S_j/\mathcal{E}_j), \alpha} (S_i/\mathcal{E}_i)) \otimes \Lambda.$$

Étant donné que

$$(\mathbb{P}^1_{Y/\mathcal{G}}(\omega)) \times_{(S_j/\mathcal{E}_j), \alpha} (S_i/\mathcal{E}_i) \simeq \mathbb{P}^1_{(Y/\mathcal{G}) \times_{(S_j/\mathcal{E}_j), \alpha} (S_i/\mathcal{E}_i)}(\alpha^*(\omega))$$

et que $\alpha^*(\omega) \in \omega_i$, ceci permet de conclure. ■

Corollaire 1.86. — *Il existe une transformation naturelle inversible*

$$i^* \circ \mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega_i)} \circ i^*$$

entre foncteurs de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((S/\mathcal{E}, I); \Lambda)$ *dans* $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}(S_i/\mathcal{E}_i; \Lambda)$.

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du Lemme 1.85. ■

Comme d'habitude, on note $\square$ la catégorie dont les objets sont les ensembles $\underline{\mathbf{1}}^n = \{0, 1\}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et où les morphismes sont engendrés par les projections $\mathrm{p}_i : \underline{\mathbf{1}}^n \to \underline{\mathbf{1}}^{n-1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et les faces $\mathrm{d}_{i,\epsilon} : \underline{\mathbf{1}}^n \to \underline{\mathbf{1}}^{n+1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$. (Pour tout ce qui concerne les objets (co-)cubiques, nous suivrons les notations de [**14**, Annexe A].) Nous sommes maintenant en mesure d'introduire le foncteur promis au début de la sous-section.

Construction 1.87. — Considérons le k-schéma cocubique $\mathbb{A}_k$ comme un diagramme $(\mathbb{A}_k, \square)$ de k-feuilletages (basiques et lisses). Comme dans la Remarque 1.77, nous disposons d'un sous-ensemble cubique pointé $\omega \subset \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}_k)$ donné par $\omega_n = \{0, \mathrm{d}t_1, \cdots, \mathrm{d}t_n\} \subset \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^n_k)$.

Appelons $(\alpha, p) : (\mathbb{A}_k, \square) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ la projection structurale. Ainsi, $p : \square \longrightarrow \{*\}$ est le foncteur vers la catégorie finale et $\alpha : (\mathbb{A}_k, \square) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(k), \square)$ est le morphisme de diagrammes de k-schémas donné par l'identité sur les catégories d'indices et par les projections structurales des $\mathbb{A}^n_k$, pour $n \in \mathbb{N}$. Avec ces notations, on définit un endofoncteur $\mathbf{O}^{\mathit{eff}}$ de la catégorie $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}(k; \Lambda)$ par la formule suivante

$$\mathbf{O}^{\mathit{eff}} = p_\sharp \circ \alpha_* \circ \mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}(\omega)} \circ (\alpha, p)^*.$$

On introduit aussi le foncteur

$$\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}} : \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}(k; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}((k, \square); \Lambda)$$

donné par $\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}} = \alpha_* \circ \mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}(\omega)} \circ (\alpha, p)^*$ et qui prend ses valeurs dans la catégorie des motifs cubiques. Ainsi, si F est un complexe de préfaisceaux sur SmFol/k, $\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}}(F)$ est un objet cubique en complexes de préfaisceaux sur SmFol/k. De plus, on a

$$\mathbf{O}^{\mathit{eff}}(F) = \mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}}(F))).$$

Ci-dessus Tot désigne le complexe total associé à un bicomplexe et C est le complexe associé à un objet cubique (voir par exemple [**14**, Définition A.4]). □

On termine la sous-section avec une propriété facile de l'endofoncteur $\mathbf{O}^{\mathit{eff}}$.

Lemme 1.88. — *Soit M un motif feuilleté, i.e., un objet de* $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}(k; \Lambda)$. *Alors, le motif* $\mathbf{O}^{\mathit{eff}}(M)$ *est* $\mathbb{P}^{1,\delta}$*-local.*

Démonstration. — La propriété d'être $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local étant stable par colimite homotopique, il suffit de montrer que $(\underline{\mathbf{1}}^n)^*\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}}(M)$ est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, par construction et grâce au Corollaire 1.86, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}(\underline{\mathbf{1}}^n)^*\widetilde{\mathbf{O}}^{\mathit{eff}}(M) &\simeq (\alpha_n)_*(\underline{\mathbf{1}}^n)^*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}(\omega)}((\alpha, p)^*(M)) \\ &\simeq (\alpha_n)_*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}(\omega_n)}(\alpha_n^* M).\end{aligned}$$

Puisque $0 \in \omega_n$, le motif $\mathrm{Loc}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}(\omega_n)}(\alpha_n^* M) \in \mathbf{FolDA}^{\mathit{eff}, \psi\text{-}\acute{e}t}(\mathbb{A}^n_k; \Lambda)$ est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local. Puisque $(\alpha_n)_*$ préserve les objets $\mathbb{P}^{1,\delta}$-locaux, ceci permet de conclure. ■

1.8. La méthode pour montrer qu'un spectre est un Ω-spectre revisitée. —

Dans la Sous-section 1.1, nous avons développé une méthode pour montrer que certains T-spectres sont des Ω_T-spectres. Les T-spectres en question étaient associés à des $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrants. Le but de cette sous-section est de montrer qu'on peut remplacer dans cette méthode l'utilisation des $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules $(\mathbb{P}^{1,\delta}, \mathbb{A}^1, \psi\text{-}ft)$-fibrants par celle des $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodules de la forme $\mho^{eff}(M)$ avec M est un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule quelconque.

Reprenons le complexe de préfaisceaux $\mathcal{K}$ sur SmFol/k utilisé dans l'étape 1 de la preuve de la Proposition 1.9. Il s'agit du complexe

$$\mathcal{K} = \left[(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} [0] & [\infty] \\ [0]-[1] & 0 \\ 0 & [0]-[1] \end{pmatrix}} (\mathbb{P}^{1,\delta}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{A}^1\otimes\mathbb{Z}) \xrightarrow{(i_1-i_0,\, s_0,\, s_\infty)} (\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z} \right]$$

où le préfaisceau $(\overline{\mathbb{X}}/\mathcal{E})\otimes\mathbb{Z}$ est placé en degré cohomologique 2. Nous allons d'abord donner une interprétation sympathique de l'endofoncteur $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, -)$. Pour ce faire, on introduit quelques notations.

Notation 1.89. — On note $(\rightrightarrows)$ la sous-catégorie de $\square$ dont les objets sont $\underline{\mathbf{1}}^0 = \{*\}$ et $\underline{\mathbf{1}}$, et dont les flèches sont les identités et les faces $\mathrm{d}_{1,\epsilon} : \{*\} \longrightarrow \underline{\mathbf{1}}$, pour $\epsilon \in \{0,1\}$. Dans la suite, on notera simplement i_ϵ au lieu de $\mathrm{d}_{1,\epsilon}$. Un préfaisceau F sur $(\rightrightarrows)$ est la donnée de deux objets F_0 et F_1 et de deux morphismes $i_0^*, i_1^* : F_1 \longrightarrow F_0$. Si F est un préfaisceau à valeurs dans une catégorie additive, on note $\mathrm{C}^{0|1}(F)$ le complexe à deux termes F_0 et F_1, placés respectivement en degrés homologiques 0 et 1, et ayant pour différentielle non nulle $i_0^* - i_1^* : F_1 \longrightarrow F_0$.

On note $\iota : (\rightrightarrows) \hookrightarrow \square$ l'inclusion évidente. Si A est un objet cubique à valeurs dans une catégorie additive, on dispose d'un morphisme de complexes $\mathrm{C}^{0|1}(A\circ\iota) \longrightarrow \mathrm{C}(A)$ donné par l'identité de A_0 et la projection évidente $A_1 \twoheadrightarrow A_1/\mathrm{im}(\mathrm{p}_1^*)$. □

Notation 1.90. — On introduit deux diagrammes de k-feuilletages $(\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows))$ et $(\overline{\mathbb{X}}^{0|1}, (\rightrightarrows))$. Le premier est simplement la restriction du k-schéma cocubique $\mathbb{A}_k$, i.e., $\mathbb{A}_k^{0|1} = \mathbb{A}_k\circ\iota$. Le second est donné par $\overline{\mathbb{X}}^{0|1}(\{*\}) = \mathbb{P}_k^{1,\delta}$, $\overline{\mathbb{X}}^{0|1}(\underline{\mathbf{1}}) = \overline{\mathbb{X}}$, et les morphismes $i_0, i_1 : \mathbb{P}_k^{1,\delta} \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}$ sont les inclusions des fibres en 0 et 1 de la projection $t : \overline{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$. On dispose d'un diagramme commutatif de $(\rightrightarrows)$-diagrammes de k-feuilletages

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)) \arrow[r, "s_0"] \arrow[dr, equal] & (\overline{\mathbb{X}}^{0|1}, (\rightrightarrows)) \arrow[d, "t"] & (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)) \arrow[l, "s_\infty"'] \arrow[dl, equal] \\ & (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)) & \end{tikzcd}$$

où s_0 et s_∞ sont induites respectivement par la section nulle et la section à l'infini de $\mathbb{P}^1$. □

Lemme 1.91. — *Soit F un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* SmFol/k. *On pose*

$$\Xi(F) = \text{Cône}\left\{ \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathbb{X}}^{0|1}, F) \xrightarrow{(s_0^*, s_\infty^*)} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}_k^{0|1}, F) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}_k^{0|1}, F) \right\};$$

c'est un préfaisceau sur $(\rightrightarrows)$ à valeurs dans les complexes de préfaisceaux sur SmFol/k. *Alors, le complexe de préfaisceaux $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, F)$ est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(F)))$.

Démonstration. — Il s'agit d'une vérification immédiate. Nous l'incluons pour la commodité du lecteur. Il suffit de montrer que les foncteurs $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, -)$ et $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(-)))$ coïncident sur les préfaisceaux sur SmFol/k ; le cas des complexes de préfaisceaux s'en déduit par passage au complexe simple associé à un bicomplexe. (On utilise ici la transitivité de la formation des complexes totaux ; voir par exemple le début de [**14**, §A.4].)

Lorsque F est un préfaisceau sur SmFol/k, $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(F)))$ est le complexe simple associé au bicomplexe

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\mathbb{X}}, F) \arrow[r, "(s_0^*, s_\infty^*)"] \arrow[d, "i_0^* - i_1^*"] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}_k^1, F) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{A}_k^1, F) \arrow[d, "(i_0^* - i_1^*)^{\oplus 2}"] \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}_k^{1,\delta}, F) \arrow[r, "(s_0^*, s_\infty^*)"] & F \oplus F \end{tikzcd}$$

où $F \oplus F$ est placé en bidegré $(0,0)$. Ainsi, $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(F)))$ est un complexe à trois termes ayant pour différentielles (en notation matricielle) :

$$\begin{pmatrix} -i_0^* + i_1^* \\ s_0^* \\ s_\infty^* \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} s_0^* & i_0^* & 0 \\ s_\infty^* & 0 & i_1^* \end{pmatrix}.$$

Une inspection des différentielles du complexe $\mathcal{K}$ permet maintenant de conclure. ■

Proposition 1.92. — *Soit M un complexe de préfaisceaux sur* SmFol/k. *Il existe un morphisme canonique dans* $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}(k;\Lambda)$ *:*

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, \sigma^{\mathit{eff}}(M)) \longrightarrow \sigma^{\mathit{eff}}(M). \tag{37}$$

Supposons de plus que M est un $\tau^{\leq 1}\Omega$-prémodule. Alors, il en est de même de $\sigma^{\mathit{eff}}(M)$ et le morphisme (37) *est une rétraction à la composition de*

$$\sigma^{\mathit{eff}}(M) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}'} \underline{\mathcal{H}om}((\mathbb{P}_k^1, \{0,\infty\}) \otimes \mathbb{Z}[-2], \sigma^{\mathit{eff}}(M)) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K}, \sigma^{\mathit{eff}}(M)) \tag{38}$$

avec $\widetilde{\gamma}'$ le morphisme obtenu par adjonction de (10).

Démonstration. — On divise la preuve en deux étapes. Dans la première, on construit le morphisme (37). Dans la seconde on montre que ce morphisme fournit une rétraction à (38).

Étape A : Appelons $\alpha^{0|1} : (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(k), (\rightrightarrows))$ le morphisme évident. Avec la Notation 1.90, on a clairement

$$\Xi(F) = (\alpha^{0|1})_* \mathrm{Cône}\left\{(s_0^*, s_1^*) : t_* t^*(F|_{\mathbb{A}_k^{0|1}}) \to F|_{\mathbb{A}_k^{0|1}} \oplus F|_{\mathbb{A}_k^{0|1}}\right\},$$

où les flèches s_ϵ^* sont les compositions de $t_*t^* \longrightarrow t_*(s_\epsilon)_*(s_\epsilon)^*t^* \simeq \mathrm{id}$.

Considérons à présent les diagrammes de k-feuilletages $(\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square)$ et $(\overline{\mathbb{X}} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square)$. Considérons aussi les deux sous-préfaisceaux ω, $\omega' \subset \mathrm{Z}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k)$ donnés par

$$\omega(\underline{\mathbf{1}}^m, \underline{\mathbf{1}}^n) = \mathrm{pr}_2^*(\omega_n) \qquad \text{et} \qquad \omega'(\underline{\mathbf{1}}^m, \underline{\mathbf{1}}^n) = \mathrm{pr}_1^*(\omega_m) \cup \mathrm{pr}_2^*(\omega_n),$$

pour $m \in \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Formons les diagrammes de diagrammes de k-feuilletages

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square) \arrow[r, "s_0'"] \arrow[d, "(\alpha', p')"] & (\overline{\mathbb{X}}^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square) \arrow[d, "(\alpha', p')"] & (\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square) \arrow[l, "s_\infty'"'] \arrow[d, "(\alpha', p')"] \\ (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)) \arrow[r, "s_0"] & (\overline{\mathbb{X}}^{0|1}, (\rightrightarrows)) & (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)), \arrow[l, "s_\infty"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (\overline{\mathbb{X}}^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square) \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "(\alpha', p')"] & (\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square) \arrow[d, "(\alpha', p')"] \\ (\overline{\mathbb{X}}^{0|1}, (\rightrightarrows)) \arrow[r, "t"] & (\mathbb{A}_k^{0|1}, (\rightrightarrows)). \end{tikzcd}$$

Posons $\widetilde{M} = \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(M|_{\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k})$; c'est un objet de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}((\mathbb{A}_k^{0|1} \times_k \mathbb{A}_k, (\rightrightarrows) \times \square); \Lambda)$. Avec ces notations, on a clairement

$$\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M)) = (\alpha^{0|1})_* p'_\sharp \alpha'_* \mathrm{Cône}\left\{(s_0'^*, s_\infty'^*) : t'_* t'^*(\widetilde{M}) \to \widetilde{M} \oplus \widetilde{M}\right\}.$$

Posons maintenant $\widetilde{M}' = \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\,\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega')}(M|_{\mathbb{A}_k^{0|1}\times_k\mathbb{A}_k})$. Puisque $\omega\subset\omega'$, on a un morphisme évident $\widetilde{M}\longrightarrow\widetilde{M}'$. De plus, étant donné que $\widetilde{M}'$ est $\mathbb{P}^1(\omega')$-local, le morphisme d'unité $\widetilde{M}'\longrightarrow t'_*t'^*\widetilde{M}'$ est un isomorphisme. Le morphisme $(-\mathrm{id},\mathrm{id}):\widetilde{M}'\oplus\widetilde{M}'\longrightarrow\widetilde{M}'$ fournit donc un morphisme canonique

$$\mathrm{Cône}\{(s'^*_0,s'^*_\infty):t'_*t'^*(\widetilde{M}')\to\widetilde{M}'\oplus\widetilde{M}'\}\longrightarrow\widetilde{M}'.$$

Il s'ensuit donc un morphisme canonique

$$\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))\longrightarrow(\alpha^{0|1})_*p'_\sharp\alpha'_*\widetilde{M}'\simeq p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}'.$$

(Le dernier « $\alpha^{0|1}$ » ci-dessus désigne le morphisme $\alpha^{0|1}:(\mathbb{A}_k^{0|1}\circ p',(\rightrightarrows)\times\square)\longrightarrow(\mathrm{Spec}(k),(\rightrightarrows)\times\square)$ trivialement déduit du morphisme $\alpha^{0|1}:(\mathbb{A}_k^{0|1},(\rightrightarrows))\longrightarrow(\mathrm{Spec}(k),(\rightrightarrows))$.)

Pour continuer, on introduit le foncteur $\mu:(\rightrightarrows)\times\square\longrightarrow\square$ composé de $\iota\times\mathrm{id}:(\rightrightarrows)\times\square\hookrightarrow\square\times\square$ et du produit tensoriel naturel de $\square$ (décrit par exemple dans [**14**, Remarque A.23]). Il est immédiat de voir que $(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}'=\mu^*\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M)$. (Utiliser pour cela le Corollaire 1.86.) En d'autres termes, le diagramme de motifs $(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}'$ est la restriction du motif cubique $\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M)$ de la Construction 1.87 suivant le foncteur μ. Or, d'après le Lemme 1.93 ci-dessous, il existe un morphisme canonique

$$\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(p'_\sharp\mu^*(-)))\longrightarrow p_\sharp.$$

On obtient ainsi le morphisme recherché

$$\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K};\sigma^{\mathit{eff}}(M))=\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))))\longrightarrow p_\sharp\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M)=\sigma^{\mathit{eff}}(M).$$

(La première égalité ci-dessus provient du Lemme 1.91.)

Étape B : On suppose dans cette étape que M est un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule. Nous allons vérifier que le morphisme construit dans l'étape précédente fournit une rétraction à la composition de (38).

D'après l'étape 3 de la preuve de la Proposition 1.9, on sait que la composition de (38) est égale (dans la catégorie homotopique) au morphisme induit par le morphisme de complexes $\mathcal{K}\longrightarrow\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}$ donné en degré zéro par

$$(-\mathrm{id},0):(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z})\longrightarrow(\mathrm{pt}\otimes\mathbb{Z}).$$

Ainsi, le morphisme

$$\sigma^{\mathit{eff}}(M)\longrightarrow\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{K},\sigma^{\mathit{eff}}(M))=\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))))$$

se factorise de la manière suivante

$$\sigma^{\mathit{eff}}(M)\longrightarrow\Gamma(\{*\},\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M)))\longrightarrow\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))))$$

et la première flèche est simplement

$$(-\mathrm{id},0):\sigma^{\mathit{eff}}(M)\longrightarrow\mathrm{Cône}\left\{(s^*_0,s^*_\infty):\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{P}^{1,\delta}_k,\sigma^{\mathit{eff}}(M))\to\sigma^{\mathit{eff}}(M)\oplus\sigma^{\mathit{eff}}(M)\right\}.$$

Avec les notations de l'étape précédente, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sigma^{\mathit{eff}}(M) \arrow[r] \arrow[ddr, bend right, "(\star\star)"'] & \Gamma(\{*\},\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))) \arrow[r] \arrow[d, "(\star)"] & \mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M)))) \arrow[d, "(\star)"] \arrow[ddr, bend left] & \\
& \Gamma(\{*\},p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}')) \arrow[d, equal] & \\
& \Gamma(\{*\},p'_\sharp\mu^*\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M)) \arrow[r] & \mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(p'_\sharp\mu^*\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M))) \arrow[r] & \sigma^{\mathit{eff}}(M),
\end{tikzcd} \tag{39}$$

où les flèches désignées par $(\star)$ sont déduites du morphisme

$$\Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))\longrightarrow p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*(\widetilde{M}')$$

construit dans l'étape précédente. (La flèche $(\star\star)$ est définie par la commutation du triangle de gauche.)

On pose $\widetilde{M}_0 = \widetilde{M}(\{*\})$ et $\widetilde{M}'_0 = \widetilde{M}'(\{*\})$; ce sont des objets de $\mathbf{FolDA}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}((\mathbb{A}_k, \square); \Lambda)$. Il est immédiat de voir que

$$\widetilde{M}_0 \simeq \widetilde{M}'_0 \simeq \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(M|_{\mathbb{A}_k}).$$

On a des identifications canoniques

$$\Gamma(\{*\}, \Xi(\sigma^{\mathit{eff}}(M))) \simeq p_\sharp\alpha_*\mathrm{Cône}\left\{(s_0^*, s_\infty^*) : (t_0)_*(t_0)^*\widetilde{M}_0 \to \widetilde{M}_0 \oplus \widetilde{M}_0\right\}$$

$$\Gamma(\{*\}, p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}') \simeq p_\sharp\alpha_*\widetilde{M}_0 = p_\sharp\sigma^{\mathit{eff}}(M)$$

avec $t_0 : (\mathbb{P}^{1,\delta}_k \times_k \mathbb{A}_k, \square) \longrightarrow (\mathbb{A}_k, \square)$ la projection sur le premier facteur. De plus, modulo ces identifications, la flèche $(\star)$ est obtenue comme suit : puisque $\widetilde{M}_0$ est $\mathbb{P}^{1,\delta}$-local, le morphisme d'unité $\widetilde{M}_0 \longrightarrow (t_0)_*(t_0)^*\widetilde{M}_0$ est inversible de sorte que $(-\mathrm{id}, \mathrm{id}) : \widetilde{M}_0 \oplus \widetilde{M}_0 \longrightarrow \widetilde{M}_0$ s'étend en un morphisme $(\star)$. Il s'ensuit que modulo les identifications

$$\Gamma(\{*\}, p'_\sharp(\alpha^{0|1})_*\alpha'_*\widetilde{M}') = \Gamma(\{*\}, p'_\sharp\mu^*\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M)) = p_\sharp\widetilde{\sigma}^{\mathit{eff}}(M),$$

la flèche $(\star\star)$ est l'identité. Ceci montre que la composition du bord inférieur du diagramme (39) est l'identité. ■

Lemme 1.93. — *Soit A un objet cubique d'une catégorie abélienne et considérons le préfaisceau $A \circ \mu$ sur $(\rightrightarrows) \times \square$. Soit* $\mathrm{C}(A \circ \mu)$ *le complexe simple (au sense de* [**14**, Définition A.4]*) associé à $A \circ \mu$ vu comme un objet cubique à valeurs dans les préfaisceaux sur $(\rightrightarrows)$. Alors, il existe un morphisme canonique dans la catégorie dérivée* $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{0|1}(\mathrm{C}(A \circ \mu))) \longrightarrow \mathrm{C}(A)$.

Démonstration. — Le préfaisceau $\mathrm{C}(A \circ \mu)$ sur $(\rightrightarrows)$ admet la description suivante. En $\{*\}$, il est donné par le complexe simple $\mathrm{C}(A)$ associé à l'objet cubique A. En $\underline{\mathbf{1}}$, il est donné par le complexe simple $\mathrm{C}(A_{1+\bullet})$ associé à l'objet cubique $A_{1+\bullet}$. De plus, les flèches i^*_ϵ sont induites par les morphismes d'objets cubiques $\mathrm{d}^*_{1,\epsilon} : A_{1+\bullet} \longrightarrow A$. Il suffit donc de montrer que les morphismes $\mathrm{d}^*_{1,0}, \mathrm{d}^*_{1,1} : \mathrm{C}(A_{1+\bullet}) \longrightarrow \mathrm{C}(A)$ sont homotopes ce qui est bien vrai. En effet, il suffit de construire une homotopie entre les morphismes $\mathrm{d}^*_{1,0}, \mathrm{d}^*_{1,1} : \mathrm{C}^\sharp(A_{1+\bullet}) \longrightarrow \mathrm{C}^\sharp(A)$ (voir le début de [**14**, §A.1]). Une telle homotopie est fournie par les identités des A_n, pour $n \geqslant 1$. ■

Corollaire 1.94. — *Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule. Alors, le morphisme*

$$\gamma' : \sigma^{\mathit{eff}}(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1_k, \infty), \sigma^{\mathit{eff}}(M)[2]),$$

déduit par adjonction de la composition de

$$(\mathbb{P}^1_k, \infty) \otimes \sigma^{\mathit{eff}}(M) \longrightarrow \tau^{\leqslant 1}\Omega[2] \otimes \sigma^{\mathit{eff}}(M) \longrightarrow \sigma^{\mathit{eff}}(M)[2],$$

admet une rétraction canonique.

Démonstration. — Ceci découle du Lemme 1.10 et de la Proposition 1.92. ■

Notation 1.95. — On dispose d'une transformation naturelle

$$T \otimes \sigma^{\mathit{eff}}(-) \longrightarrow \sigma^{\mathit{eff}}(T \otimes -).$$

Avec les notations de la Construction 1.87, cette transformation naturelle est la composition de

$$\begin{array}{ccc}
T \otimes (p_\sharp\alpha_*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(\alpha, p)^*(-)) & \xrightarrow{\sim} & p_\sharp(p^*T \otimes (\alpha_*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(\alpha, p)^*(-))) \\
 & & \downarrow \\
p_\sharp\alpha_*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}((\alpha, p)^*T \otimes (\alpha, p)^*(-)) & \longleftarrow & p_\sharp\alpha_*((\alpha, p)^*T \otimes \mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(\alpha, p)^*(-)) \\
\downarrow & & \\
p_\sharp\alpha_*\mathrm{Loc}^{\mathit{eff},\psi\text{-}\acute{e}t}_{\mathbb{P}^1(\omega)}(\alpha, p)^*(T \otimes (-)). & &
\end{array}$$

(En fait, l'avant dernière flèche utilise un modèle explicite et pseudo-monoïdal du foncteur de $\mathbb{P}^1(\omega)$-localisation qui sera donné plus tard.) On utilise cette transformation naturelle pour étendre le foncteur

σ^{eff} aux T-spectres ; cette extension est aussi notée σ^{eff}. Étant donné un T-spectre $\mathbf{E}$, le T-spectre $\sigma^{eff}(\mathbf{E})$ est donné par $\sigma^{eff}(\mathbf{E}_n)$ en niveau n. □

Théorème 1.96. — *Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule sur* SmFol$/k$ *et considérons le T-spectre* $\mathbf{M} = \{M[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *associé à M. Alors, le T-spectre $\sigma^{eff}(\mathbf{M}) = \{\sigma^{eff}(M)[2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un Ω_T-spectre.*

Démonstration. — L'argument qui a permis de déduire le Théorème 1.7 de la Proposition 1.8 permet aussi de déduire le résultat souhaité du Corollaire 1.94. ■

Dans la même veine, on note le résultat suivant qui jouera un rôle fondamental dans la preuve de la conjecture de conservativité.

Théorème 1.97. — *Soit M un $\tau^{\leqslant 1}\Omega$-prémodule sur* SmFol$/k$*. Alors, le T-spectre*

$$\sigma^{eff}(\Sigma_T^\infty(M)) = \{\sigma^{eff}(T^{\otimes n} \otimes M)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

est un Ω_T-spectre. De plus, le morphisme évident $\sigma^{eff}(\Sigma_T^\infty(M)) \longrightarrow \sigma^{eff}(\mathbf{M})$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \psi\text{-ét})$-locale niveau par niveau.

Démonstration. — La preuve du Théorème 1.39 s'applique sans modifications. ■

Références

[1] *Schémas en groupes. Tome 2 : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. MR 0274459

[2] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. MR 0354651

[3] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354652

[4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354653

[5] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354654

[6] Dan Abramovich and Kalle Karu, *Weak semistable reduction in characteristic 0*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 241–273. MR 1738451

[7] Jiří Adámek and Jiří Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1294136

[8] Yves André, *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 5, 685–739. MR 1862024

[9] Alberto Arabia, *Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 4, 607–639. MR 1881700

[10] Michael Artin and Barry Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969. MR 0245577

[11] Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I*, Astérisque (2007), no. 314, x+466 pp. (2008). MR 2423375

[12] ———, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, Astérisque (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008). MR 2438151

[13] ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 1, 1–145. MR 3205601

[14] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 1–149. MR 3259031

[15] ———, *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2015), no. 140-141, vi+386. MR 3381140

[16] ———, *From motives to comodules over the motivic Hopf algebra*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), no. 7, 1507–1559. MR 3614965

[17] Joseph Ayoub and Luca Barbieri-Viale, *1-motivic sheaves and the Albanese functor*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 5, 809–839. MR 2494373

[18] Joseph Ayoub and Steven Zucker, *Relative Artin motives and the reductive Borel-Serre compactification of a locally symmetric variety*, Invent. Math. **188** (2012), no. 2, 277–427. MR 2909768

[19] Luca Barbieri-Viale and Bruno Kahn, *On the derived category of 1-motives*, Astérisque (2016), no. 381, xi+254. MR 3545132

[20] Alexander Beĭlinson, *Residues and adèles*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **14** (1980), no. 1, 44–45. MR 565095

[21] ———, *On the derived category of perverse sheaves*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 27–41. MR 923133

[22] Bhargav Bhatt and Peter Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque (2015), no. 369, 99–201. MR 3379634

[23] Spencer Bloch, *The moving lemma for higher Chow groups*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 537–568. MR 1269719

[24] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7. Reprint. MR 782297

[25] ———, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. Reprint. MR 782296

[26] Michel Brion, *Anti-affine algebraic groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 3, 934–952. MR 2488561

[27] ———, *The coherent cohomology ring of an algebraic group*, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), no. 5, 1449–1467. MR 3102962

[28] Alexandru Buium, *Differential function fields and moduli of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1226, Springer-Verlag, Berlin, 1986. MR 874111

[29] Henri Cartan, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 77–99. MR 0094830

[30] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, Symplectic geometry of affine complex manifolds. MR 3012475

[31] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raymond Hoobler, and Bruno Kahn, *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), Fields Inst. Commun., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 31–94. MR 1466971

[32] Brian Conrad, *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), no. 1, 1–18. MR 1906417

[33] Pierre Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR 0417174

[34] ———, *Théorie de Hodge. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1971), no. 40, 5–57. MR 0498551 (58 #16653a)

[35] Christopher Deninger, *A proper base change theorem for nontorsion sheaves in étale cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **50** (1988), no. 3, 231–235. MR 938616

[36] Halvard Fausk and Daniel Isaksen, *Model structures on pro-categories*, Homology Homotopy Appl. **9** (2007), no. 1, 367–398. MR 2299804

[37] Eric Friedlander, *Bloch-Ogus properties for topological cycle theory*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), no. 1, 57–79. MR 1743719

[38] Eric Friedlander, Christian Haesemeyer, and Mark Walker, *Techniques, computations, and conjectures for semi-topological K-theory*, Math. Ann. **330** (2004), no. 4, 759–807. MR 2102312

[39] Eric Friedlander and Andrei Suslin, *The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), no. 6, 773–875. MR 1949356

[40] Ofer Gabber and Shane Kelly, *Points in algebraic geometry*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), no. 10, 4667–4680. MR 3346512

[41] Martin Gallauer Alves de Souza and Utsav Choudhury, *Homotopy theory of dg sheaves*, Preprint (2015).

[42] Paul Goerss and John Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. MR 1711612

[43] Hans Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 460–472. MR 0098847

[44] Phillip Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1970), no. 38, 125–180. MR 0282990

[45] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 4, 228. MR 0217083

[46] ______, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 8, 222. MR 0217084

[47] ______, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 11, 167. MR 0217085

[48] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 20, 259. MR 0173675

[49] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 28, 255. MR 0217086

[50] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1967), no. 32, 361. MR 0238860

[51] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971. MR 3075000

[52] Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203 ; ibid. (2) **79** (1964), 205–326. MR 0199184

[53] Melvin Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 43–60. MR 0251026

[54] Raymond Hoobler, *The differential brauer group*, Preprint (2010).

[55] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134

[56] Annette Huber, *On the Parshin-Beĭlinson adèles for schemes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **61** (1991), 249–273. MR 1138291

[57] John Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), no. 1, 35–87. MR 906403

[58] Kiran Kedlaya, *Good formal structures for flat meromorphic connections, II : excellent schemes*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 1, 183–229. MR 2726603

[59] Bernhard Keller, *On differential graded categories*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 151–190. MR 2275593

[60] Ellis Robert Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York-London, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. MR 0568864

[61] Jerald Kovacic, *The differential Galois theory of strongly normal extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 11, 4475–4522. MR 1990759

[62] ______, *Geometric characterization of strongly normal extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 9, 4135–4157. MR 2219014

[63] Marc Levine, *Blowing up monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **160** (2001), no. 1, 67–103. MR 1829313

[64] ______, *The homotopy coniveau tower*, J. Topol. **1** (2008), no. 1, 217–267. MR 2365658

[65] Bernard Malgrange, *Systèmes différentiels involutifs*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 19, Société Mathématique de France, Paris, 2005. MR 2187078

[66] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, second ed., Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980. MR 575344

[67] Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR 2242284 (2007e :14035)

[68] Fabien Morel, *The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems*, K-Theory **35** (2005), no. 1-2, 1–68. MR 2240215

[69] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45–143. MR 1813224 (2002f :14029)

[70] Dorin Popescu, *General Néron desingularization*, Nagoya Math. J. **100** (1985), 97–126. MR 818160 (87f :13019)

[71] ______, *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math. J. **104** (1986), 85–115. MR 868439 (88a :14007)

[72] Michel Raynaud and Laurent Gruson, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89. MR 0308104

[73] Joseph Fels Ritt, *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950. MR 0035763

[74] Pierre Samuel and Oscar Zariski, *Commutative algebra. Vol. II*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975, Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29. MR 0389876

[75] Jean-Pierre Serre, *Morphismes universels et variétés d'albanese.*, no. 10, E.N.S., 1958/59, Variétés de Picard. Sém. C. Chevalley, tome 4, p. 22.

[76] Mark Spivakovsky, *A solution to Hironaka's polyhedra game*, Arithmetic and geometry, Vol. II, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 419–432. MR 717618

[77] Michael Temkin, *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero*, Adv. Math. **219** (2008), no. 2, 488–522. MR 2435647

[78] Dmitrii Trushin, *Splitting fields and general differential Galois theory*, Mat. Sb. **201** (2010), no. 9, 77–110. MR 2760461

[79] Alberto Vezzani, *A motivic version of the theorem of fontaine and wintenberger*, Preprint (2014).

[80] Angelo Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–104. MR 2223406

[81] V. Voevodsky, *A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 4, 187–198. MR 1326064

[82] Vladimir Voevodsky, *Open problems in the motivic stable homotopy theory. I*, Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., vol. 3, Int. Press, Somerville, MA, 2002, pp. 3–34. MR 1977582 (2005e :14030)

[83] ______, *A possible new approach to the motivic spectral sequence for algebraic K-theory*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), Contemp. Math., vol. 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 371–379. MR 1890744

[84] ______, *Cancellation theorem*, Doc. Math. (2010), no. Extra vol. : Andrei A. Suslin sixtieth birthday, 671–685. MR 2804268

[85] ______, *Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1384–1398. MR 2593670 (2011a :55022)

[86] ______, *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1399–1406. MR 2593671 (2011e :14041)

[87] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, and Eric Friedlander, *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. MR 1764197 (2001d :14026)

[88] Charles Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1269324

[89] Oscar Zariski, *Local uniformization on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **41** (1940), 852–896. MR 0002864

[90] Dominik Zeillinger, *A short solution to Hironaka's polyhedra game*, Enseign. Math. (2) **52** (2006), no. 1-2, 143–158. MR 2255531

Joseph Ayoub,
Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
CNRS, LAGA, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
• *E-mail :* `joseph.ayoub@math.uzh.ch`