# Kapitel 5

# Asymptotik von Likelihoodfunktionen: allgemeiner Fall

Im vorangegangenen Kapitel haben wir im Fall des Wienerschen Prozesses gesehen, daß bei unbegrenzter Erhöhung der Beobachtungszahl die Likelihoodfunktion konvergiert, wobei als Grenzwerte Null und Unendlich auftreten können. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß dies in sehr viel allgemeineren Fällen ebenfalls gilt.

## 5.1 Definitionen, Martingaleigenschaften

Die folgenden Bezeichnungen und Voraussetzungen gelten für alle Abschnitte dieses Kapitels.

Es seien $P$ und $Q$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$ eine Filtration von $\sigma$-Algebren in $\mathscr{A}$, d.h., es gelte $\mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{A}_{n+1} \subseteq \mathscr{A}$, $n \geq 1$. Weiterhin sei $\mathscr{A} = \bigvee_{n\geq 1} \mathscr{A}_n := \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathscr{A}_n\right)$. (Wie wir bereits wissen, ist $\bigcup_{n\geq 1} \mathscr{A}_n$ eine Algebra von Teilmengen von $\Omega$, aber i.a. keine $\sigma$-Algebra.) Mit $P_n$ bzw. $Q_n$ bezeichnen wir die Einschränkungen von $P$ bzw. $Q$ auf $\mathscr{A}_n$.

Um die Beziehung zu stochastischen Prozessen (hier mit diskreter Zeit) herzustellen, stellen wir uns vor, daß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ Zufallsgrößen $(X_n,\ n \geq 1)$ gegeben sind, und daß $\mathscr{A}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ gilt.

**Definition 5.1.** $Q$ heißt *lokal absolutstetig bezüglich* $P$, falls $Q_n \ll P_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Es sei $Q$ lokal absolutstetig bezüglich $P$ und es sei $L_n := \dfrac{dQ_n}{dP_n}$, $n \geq 1$. Die Folge $(L_n, n \geq 1)$ heißt der *Likelihoodprozess von $Q$ bezüglich $P$*.

**Lemma 5.2.** *$(L_n, \mathscr{A}_n, n \geq 1)$ ist ein nichtnegatives Martingal bezüglich $P$ und $(L_n^{\frac{1}{2}}, \mathscr{A}_n, n \geq 1)$ ist ein gleichgradig integrierbares nichtnegatives Supermartingal bezüglich $P$.*

*Beweis:*
$L_n$ und $L_n^{\frac{1}{2}}$ sind nach Definition (vgl. Radon-Nikodym-Theorem) $\mathscr{A}_n$-meßbar. Außerdem gilt für jedes $A \in \mathscr{A}_n$

$$\int_A L_n \, dP = Q(A) = \int_A L_{n+1} \, dP. \qquad \text{(wegen } \mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{A}_{n+1}\text{)}$$

Das ist die Martingaleigenschaft für $(L_n, \mathscr{A}_n)$. Daß $L_n^{\frac{1}{2}}$ ein Supermartingal ist, folgt mittels der Jensenschen Ungleichung und der Tatsache, daß $x \longrightarrow -x^{\frac{1}{2}}$, $(x > 0)$ konvex ist:

$$0 \leq \mathbb{E}_P(L_{n+1}^{\frac{1}{2}} \mid \mathscr{A}_n) \leq (\mathbb{E}_P\,(L_{n+1} \mid \mathscr{A}_n))^{\frac{1}{2}} = L_n^{\frac{1}{2}}.$$

□

Es gilt

$$L_n \geq 0 \text{ und } \mathbb{E}_P(L_n) = \int_\Omega \frac{dQ_n}{dP_n} \, dP = 1, \text{ sowie } \mathbb{E}_P(L_n^{\frac{1}{2}}) \leq \mathbb{E}_P(L_n) = 1. \tag{5.1}$$

(Schwarzsche Ungleichung)

Aus dem Martingalkonvergenzsatz folgt, daß $(L_n)$ $P$-fast sicher gegen eine nichtnegative Zufallsgröße $L_\infty$ konvergiert, für die, wegen $\mathbb{E}_P(L_n) = 1$ und wegen des Fatouschen Lemmas, $\mathbb{E}_P(L_\infty) \leq 1$ gilt. Insbesondere ist $P(L_\infty < \infty) = 1$.

Für die Folge $\rho_n := \mathbb{E}_P(L_n^{\frac{1}{2}})$ erhalten wir

$$0 < \rho_{n+1} \leq \rho_n \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Folglich existiert der Grenzwert $\rho := \lim_{n\to\infty} \rho_n$.
Die gleichgradige Integrierbarkeit von $(L_n^{\frac{1}{2}})$ ergibt sich aus

$$\int_{\{L_n^{\frac{1}{2}} > c\}} L_n^{\frac{1}{2}} \, dP \leq P(L_n^{\frac{1}{2}} > c) \cdot \mathbb{E}_P(L_n) = P(L_n^{\frac{1}{2}} > c) \leq \frac{E_P(L_n)}{c^2} = \frac{1}{c^2} \quad \text{für alle } c > 0, n \geq 1.$$

Somit gilt also auch

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left(\left|L_n^{\frac{1}{2}} - L_\infty^{\frac{1}{2}}\right|\right) = 0 \text{ und insbesondere} \\ &\rho = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P(L_n^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{E}_P(L_\infty^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

□

## 5.2 Konvergenz des Likelihoodprozesses

Wir kommen nun zum zentralen Punkt dieses Kapitels, dem folgenden Theorem:

**Aussage 5.1.** *Es seien $P$ und $Q$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}_n))$, so daß $Q$ lokal absolutstetig bezüglich $P$ ist. Dann gelten folgende Aussagen:*

*a) $(L_n)$ konvergiert $(P+Q)$-fast überall gegen eine Zufallsgröße $L_\infty$ mit $0 \le L_\infty \le \infty$, und es gilt:*

$$Q(A) = \int_A L_\infty \, dP + Q\left(A \cap \{L_\infty = \infty\}\right) \tag{5.3}$$

*Insbesondere konvergiert $(L_n)$ sowohl $P$- als auch $Q$-fast sicher gegen $L_\infty$.*

*b) Jede der folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß $Q$ absolutstetig bezüglich $P$ (auf $\mathscr{A} = \bigvee_{n\ge1} \mathscr{A}_n$) ist:*

*i) $Q(L_\infty = \infty) = 0$,*

*ii) $\mathbb{E}_P(L_\infty) = 1$.*

*In diesem Fall ist*

$$Q(A) = \int_A L_\infty \, dP, \quad A \in \mathscr{A}$$

*und $L_n$ konvergiert im $L_1(P)$-Sinne gegen $L_\infty$. (Insbesondere ist $(L_n)$ bezüglich $P$ gleichgradig integrierbar.)*

*c) Jede der folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß $Q$ und $P$ auf $\mathscr{A}_\infty$ singulär zueinander sind:*

*i) $Q(L_\infty = \infty) = 1$,*

*ii) $\mathbb{E}_P(L_\infty) = 0$.*

*In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} L_n = L_\infty = \infty \quad Q\text{-}f.s.,$$
$$\lim_{n\to\infty} L_n = L_\infty = 0 \quad P\text{-}f.s.$$

**Bemerkungen:**

1. Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ heißen *singulär zueinander*, wenn es ein $A_0 \in \mathscr{A}$ mit $P(A_0) = 1,\ Q(\Omega \setminus A_0) = 1$ gibt.
2. (5.3) liefert die Zerlegung von $Q$ in einen bezüglich $P$ absolutstetigen und einen bezüglich $P$ singulären Anteil, man nennt sie die „Lebesguesche Zerlegung“ von $Q$ bezüglich $P$.

*Beweis:*
Zu a)
1. Schritt: Einführung des Martingals $(U_n, \mathscr{A}_n)$:
Wir definieren $R_n := \frac{1}{2}(P_n + Q_n)$ und $R := \frac{1}{2}(P + Q)$.
Offenbar gilt

$$Q_n \ll R_n, \quad P_n \ll R_n, \quad Q \ll R, \quad P \ll R.$$

Weiterhin definieren wir für jedes $n \geq 1$

$$U_n := \frac{dQ_n}{dP_n}.$$

Dann ist $(U_n, \mathscr{A}_n)$ ein nichtnegatives Martingal bezüglich $R$ mit

$$0 \leq U_n \leq 2 \quad R\text{-fast sicher.} \tag{5.4}$$

Die Martingaleigenschaft von $(U_n, \mathscr{A}_n)$ beweist man wie im Abschnitt 5.1. Die Ungleichungen (5.4) erhält man aus

$$\int_A U_n\, dR_n = Q_n(A) \leq Q_n(A) + P_n(A) = \int_A 2\, dR_n, \quad A \in \mathscr{A}_n.$$

Somit existiert der Grenzwert $U_\infty = \lim_{n\to\infty} U_n$ fast sicher bezüglich $R$, $U_\infty$ ist $\mathscr{A}$-meßbar, und es gilt (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P\left(|U_n - U_\infty|\right) = 0. \tag{5.5}$$

2. Schritt: Identifikation von $U_\infty$.
Für jedes $A \in \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{A}_n$ gilt

$$Q(A) = \lim_{n\to\infty} Q_n(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A U_n \, dR = \int_A U_\infty \, dR,$$

daraus folgt (! Fortsetzungssatz für $\sigma$-additive Mengenfunktionen von einer Algebra auf die von ihr erzeugte $\sigma$-Algebra)

$$Q \ll R \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dR}(\omega) = U_\infty(\omega) \quad R\text{-fast sicher.}$$

(Es sei daran erinnert, daß $Q$ und $R$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{A}_\infty$ sind.)
Analog ergibt sich mit

$$V_n := \frac{dP_n}{dR_n} = 2 - U_n \quad \text{und} \quad V_\infty := \lim_{n\to\infty} V_n$$

die Beziehung

$$V_\infty = \frac{dP}{dR} = 2 - U_\infty \quad R\text{-fast sicher.}$$

Als Folgerung aus (5.4) erhalten wir für alle $A \in \mathscr{A}$

$$\int_A U_\infty \, dP = \int_A U_\infty \frac{dP}{dR} \, dR = \int_A (2 - U_\infty) \, dQ, \quad A \in \mathscr{A}. \tag{5.6}$$

Weiterhin haben wir

$$P(U_\infty = 2) = \int_{\{U_\infty = 2\}} (2 - U_\infty) \, dR = 0 \tag{5.7}$$

und

$$Q(U_\infty = 0) = \int_{\{U_\infty = 0\}} U_\infty \, dR = 0. \tag{5.8}$$

**Lemma 5.3.** *Es gilt $Q \ll P$ (auf $\mathscr{A}$) genau dann, wenn $Q(U_\infty = 2) = 0$. In diesem Fall ist*

$$Q(A) = \int_A \frac{U_\infty}{2 - U_\infty} \, dP, \quad A \in \mathscr{A}. \tag{5.9}$$

*Beweis des Lemmas:*

„$\Rightarrow$“-Richtung: Da $P(U_\infty = 2) = 0$, folgt aus $Q \ll P$ auch $Q(U_\infty = 2) = 0$.

„$\Leftarrow$“-Richtung: Gilt $Q(U_\infty = 2) = 0$, so haben wir für alle $A \in \mathscr{A}$

$$Q(A) = \int_{A \cap \{U_\infty < 2\}} U_\infty \, dR = \int_{A \cap \{U_\infty < 2\}} U_\infty \cdot \frac{2 - U_\infty}{2 - U_\infty} \, dR = \int_{A \cap \{U_\infty < 2\}} \frac{U_\infty}{2 - U_\infty} \, dP.$$

Wegen (5.7) folgt daraus die Formel (5.9). Ist nun $P(A) = 0$, so ist wegen (5.9) auch $Q(A) = 0$. Also gilt $Q \ll P$. $\square$

<u>3. Schritt:</u> Die Zerlegung der Verteilung $Q$

Wir definieren für alle $\omega \in \Omega$ und alle $n$ mit $1 \leq n \leq \infty$

$$\Lambda_n(\omega) := \begin{cases} \frac{U_n(\omega)}{2 - U_n(\omega)}, & \text{falls } U_n(\omega) < 2, \\ \infty, & \text{falls } U_n(\omega) = 2. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$\{\omega \, : \, \Lambda_\infty(\omega) = \infty\} = \{\omega \, : \, U_\infty(\omega) = 2\}. \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \lim_{n \to \infty} U_n(\omega) &= U_\infty(\omega) \qquad R\text{-fast sicher,} \\ \text{folgt } \lim_{n \to \infty} \Lambda_n(\omega) &= \Lambda_\infty(\omega) \qquad R\text{-fast sicher.} \end{aligned}$$

Daraus, aus (5.7), sowie (5.10) ergibt sich $P(\Lambda_\infty = \infty) = 0$.

Aus (5.6) und (5.7) ergibt sich für jedes $A \in \mathscr{A}$

$$\int_A U_\infty \, dP = \int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} U_\infty \, dP = \int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} U_\infty \frac{dP}{dR} \, dR = \int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} U_\infty (2 - U_\infty) \, dR = \int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} (2 - U_\infty) \, dQ.$$

Daraus folgt für jedes $A \in \mathscr{A}$ und jede nichtnegative $\mathscr{A}$-meßbare Zufallsgröße $Z$ mittels der Approximationsmethode

$$\int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} Z U_\infty \, dP = \int_A \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} Z (2 - U_\infty) \, dQ$$

und insbesondere für $Z = \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} (2 - U_\infty)^{-1}$ folgt aus (5.9)

$$\int_A \frac{U_\infty}{2 - U_\infty} \mathbf{1}_{\{U_\infty < 2\}} \, dP = Q(A \cap \{U_\infty < 2\}).$$

Mittels (5.7) ergibt sich für alle $A \in \mathscr{A}$

$$
\begin{aligned}
&Q(A \cap \{U_\infty < 2\}) = \int_A \Lambda_\infty \, dP \quad \text{und damit} \\
&Q(A) = Q(A \cap \{\Lambda_\infty = \infty\}) + \int_A \Lambda_\infty \, dP, \quad A \in \mathscr{A}, \qquad (5.11) \\
&\text{wobei (siehe oben) } Q(\Lambda_\infty = 0) = 0 \text{ und } P(\Lambda_\infty = \infty) = 0 \text{ gelten.}
\end{aligned}
$$

<u>4. Schritt:</u> Identifikation von $\Lambda_n$, $n \leq \infty$
Wegen

$$\frac{dP_n}{dR_n} = 2 - U_n, \quad \text{gilt} \quad P_n(A) = \int_A (2 - U_n) \, dR_n$$

und somit $P_n(U_n = 2) = 0$.
Damit ist

$$\int_A U_n \, dP_n = \int_{A \cap \{U_n < 2\}} U_n \, dP_n = \int_{A \cap \{U_n < 2\}} U_n \frac{dP_n}{dR_n} \, dR_n = \int_{A \cap \{U_n < 2\}} (2 - U_n) \, dQ_n.$$

Mit der gleichen Methode wie im Lemma des 2. Schrittes folgt nun

$$\int_A \frac{U_n}{2 - U_n} \, dP_n = Q_n(A), \quad A \in \mathscr{A}_n.$$

Das bedeutet aber
$L_n = \frac{U_n}{2-U_n}$ $P_n$-f.s., und wegen $Q_n \ll P_n$ auch $R_n$-f.s., also auch $R$-f.s. Insbesondere ist $L_n < \infty$ $R$-f.s.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U_\infty$ $R$-f.s., ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \Lambda_\infty \;\; R\text{-f.s.} \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} L_n =: L_\infty \; R\text{-f.s. und } L_\infty = \Lambda_\infty \; R\text{-f.s.}$$

Unter Berücksichtigung von (5.11) ist damit Teil a) bewiesen.
Zu b)
Ist $Q \ll P$, so gilt wegen $P(L_\infty = \infty) = 0$ auch $Q(L_\infty = \infty) = 0$ und

$$1 = Q(\Omega) = \int_\Omega L_\infty \, dP = \mathbb{E}_P(L_\infty).$$

Ist umgekehrt $Q(L_\infty = \infty) = 0$, so folgt aus a), daß $Q \ll P$ gilt und $1 = \mathbb{E}_P(L_\infty)$ erfüllt ist.
Im Fall $\mathbb{E}_P(L_\infty) = 1$ muß $Q(L_\infty = \infty) = 0$ gelten.
Zu c)

Aus $Q(L_\infty = \infty) = 1$ folgt $\mathbb{E}_P(L_\infty) = 0$, also $P(L_\infty = 0) = 1$, somit sind $P$ und $Q$ singulär.
Umgekehrt, sind $P$ und $Q$ singulär, gibt es also ein $A_0 \in \mathscr{A}$ mit $P(A_0) = 1,\ Q(\Omega \setminus A_0) = 1$, so ist

$$1 = Q(\Omega \setminus A_0) = \int_{\Omega\setminus A_0} L_\infty \, dP + Q\Big(\{L_\infty = \infty\} \cap \Omega \setminus A_0\Big) = 0 + Q(L_\infty = \infty).$$

□

*Folgerung* 5.4. Unter den Voraussetzungen der Aussage 5.1 gilt mit $\rho = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P({L_n}^{\frac{1}{2}})$ (siehe Abschnitt 5.1):
Falls $\rho = 0$, so sind $P$ und $Q$ auf $\mathscr{A}$ zueinander singulär.

*Beweis:*
Es gilt $\rho = \mathbb{E}_P(L_\infty^{\frac{1}{2}})$, folglich ist $L_\infty = 0$ $P$-fast sicher, und die Behauptung folgt aus Teil c) der Aussage. □

## 5.3 Eine Anwendung

Es seien $P$ und $Q$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und es sei $(X_n,\ n \geq 1)$ eine Folge reellwertiger Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathscr{A})$, die bezüglich $P$ und bezüglich $Q$ voneinander unabhängig seien. Für die Verteilungen jeder der $X_n$ gelte

$$Q^{X_n} \ll P^{X_n}, \text{ d.h. } P(X_n \in B) = 0 \quad \text{impliziert} \quad Q(X_n \in B) = 0, \quad B \in \mathscr{B}.$$

Wir setzen

$$f_n(x) = \frac{dQ^{X_n}}{dP^{X_n}}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mit $\mathscr{A}_n$ werde die von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ erzeugte Teil-$\sigma$-Algebra von $\mathscr{A}$ bezeichnet, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\mathscr{A} = \mathscr{A}_\infty := \bigvee_{n\geq 1} \mathscr{A}_n$. Mit der Terminologie von Abschnitt 5.1 gilt, daß $Q$ bezüglich $P$ lokal absolutstetig ist. Auf Grund der Unabhängigkeit der $X_n,\ n \geq 1$ unter $P$ und $Q$ gilt

$$L_n(\omega) = \frac{dQ_n}{dP_n}(\omega) = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(X_k\left(\omega\right)\right).$$

Wir definieren

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_p\left(f_k^{\frac{1}{2}}\left(X_k\right)\right).$$

**Aussage 5.2 (Null-Eins-Gesetz von Kakutani).** *$Q$ ist auf $\mathscr{A}_\infty$ entweder absolutstetig oder singulär zu $P$, je nachdem, ob $\rho > 0$ oder $\rho = 0$ gilt.*

*Beweis:*
Ist $\rho > 0$, so bildet $(L_n^{\frac{1}{2}},\ n \geq 1)$ eine Cauchyfolge in $L_2(P)$. Das ergibt sich aus

$$\mathbb{E}_P \left| L_n^{\frac{1}{2}} - L_m^{\frac{1}{2}} \right|^2 = 2 - 2\, \mathbb{E}_P \left( L_n^{\frac{1}{2}} \cdot L_m^{\frac{1}{2}} \right)$$

und (falls $n < m$, wir nutzen die Unabhängigkeit der $(X_k,\ k \geq 1)$)

$$\mathbb{E}_P \left( L_n^{\frac{1}{2}} \cdot L_m^{\frac{1}{2}} \right) = \mathbb{E}_P(L_n) \cdot \mathbb{E}_P \left( \prod_{k=n+1}^{m} f_k^{\frac{1}{2}} (X_k) \right) = \prod_{k=n+1}^{m} \mathbb{E}_P \left( f_k^{\frac{1}{2}} (X_k) \right) = \frac{\rho_m}{\rho_n}$$

mit der Notation $\rho_n = \mathbb{E}_P \left( L_n^{\frac{1}{2}} \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}_P \left( f_k^{\frac{1}{2}} (X_k) \right)$.
Wegen $\rho > 0$ ist $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{\rho_m}{\rho_n} = 1$.
Da $(L_n)$ $P$-fast sicher gegen $L_\infty$ konvergiert, muß folglich $(L_n^{\frac{1}{2}})$ im $L_2(P)$-Sinne gegen $L_\infty^{\frac{1}{2}}$ konvergieren. Das bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P \mid L_n - L_\infty \mid = 0,$$

und somit gilt wegen $\mathbb{E}_P(L_n) = 1$ auch $\mathbb{E}_P(L_\infty) = 1$. Nun wenden wir die Aussage 5.1 an und erhalten $Q \ll P$ mit

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k \left( X_k \left( \omega \right) \right).$$

Ist $\rho = 0$, so ergibt sich die Singularität von $P$ und $Q$ aus der Folgerung 5.4. $\square$