Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

3. Übung, 14. 11. 2005

In allen Aufgaben sei $(W_t, t \geq 0)$ ein reellwertiger Standard Wienerprozeß über $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. Es seien f und g zwei reellwertige quadratisch integrierbare Funktionen auf $[a, b]$. Man zeige, daß gilt:

   (a) $$\mathbb{E}\Big[\int_a^b f(s)\, dW_s \int_a^b g(s)\, dW_s\Big] = \int_a^b f(s)g(s)\, ds,$$

   (b) $$\mathbb{E}\Big[\int_a^s f(u)\, dW_u \int_a^t g(v)\, dW_v\Big] = \int_a^{s\wedge t} f(u)g(u)\, du, \quad a \leq s, t \leq b.$$

2. Man beweise: für den Prozeß

   $$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}, \qquad t \in [0,1)$$

   existiert $\lim_{t\nearrow 1} X_t$ $\mathbb{P}$-fast sicher und ist gleich 0.

3. Man zeige, daß $X_t := W_t - tW_1,\ t \in [0,1]$ ein Gaußscher Prozeß ist und berechne seine Erwartungswert- und Kovarianzfunktion.

4. Es seien $a > 0$ und $\big(X_t,\ t \geq 0\big)$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

   $$dX_t = aX_t\, dt + dW_t \quad \text{mit} \quad X_0 = -\int_0^\infty e^{-as}\, dW_s.$$

   Man berechne die Lösung $\big(X_t,\ t \geq 0\big)$ und zeige, daß sie ein Gaußscher Prozeß ist, der überdies stationär ist. Wie lautet seine Kovarianzfunktion?