Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

4. Übung, 28. 11. 2005

1.* Ist $W = (W_t,\ t \geq 0)$ ein reellwertiger Standard Wienerprozeß, so sind die Zufallsgrößen

$$U_n = \int_0^1 \cos(n\pi s)\, dW_s$$

voneinander unabhängig und identisch verteilt. Beweisen Sie diesen Sachverhalt. Welche Verteilung haben die U_n?

2.* Es seien $W = (W_t,\ t \geq 1)$ ein n-dimensionaler Standard Wienerprozeß und U eine orthogonale $n \times n$-Matrix, d.h. $UU^T = I$. Man zeige, daß $\tilde{W} = (\tilde{W}_t,\ t \geq 0)$ mit $\tilde{W}_t = UW_t$ ebenfalls ein n-dimensionaler Standard Wienerprozeß ist.

3.* Zeigen Sie: Ist $W = (W_t,\ t \geq 0)$ ein Standard Wienerprozeß und ist (f_n) eine Folge beschränkter meßbarer Funktionen auf $[0,1]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[0,1]} |f_n(s)| = 0$, so gilt

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^1 f_n\, dW\right|^p\right) \longrightarrow 0 \quad \text{für jedes } p \in [1,\infty).$$

4. Es sei $W = (W_t,\ t \geq 0)$ ein Standard Wienerprozeß. Zeigen Sie, daß für jedes $p > 0$ und $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ die Folge

$$n^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^p$$

in Wahrscheinlichkeit gegen eine positive Konstante v_p konvergiert, falls $n \longrightarrow \infty$ gilt.
Was folgt daraus für die p-Variation

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^p \ ?$$

Hinweis: Man nutze die Skalierungseigenschaft $c^{\frac{1}{2}} W_t \stackrel{d}{=} W_{ct},\ t \geq 0$ und das schwache Gesetz der großen Zahlen.

5. Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, zentrierte Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, so gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2). \qquad \text{(Kolmogorovsche Ungleichung)}$$

Hinweis: Mit den Bezeichnungen

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i, \quad k = 1, \ldots n, \qquad \tau := \min\{k \ : \ |S_k| \geq \epsilon\},$$
$$\tau := \infty, \text{ falls } |S_k| < \epsilon,\ k = 1, \ldots, n, \qquad A_k := \{\tau = k\}$$

gilt

$$A := \left\{\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geq \epsilon\right\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ und } A_k \cap A_l = \emptyset \text{ für } k \neq l.$$

Zeigen Sie zunächst, daß

$$\epsilon^2 \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}\right)$$

gilt, indem Sie $S_n = S_n - S_k + S_k$ und die Unabhängigkeitsvoraussetzung nutzen.

Bemerkung: Für $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ p \geq 1$ gilt

$$\mathbb{E}\left(|X|^p\right) = \frac{2^{\frac{p}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \quad \text{mit } \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx,\ s \geq 1.$$

Die *-Aufgaben sind schriftlich am 5.12.05 abzugeben.