Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

6. Übung, 9. 01. 2006

1. Eine zweidimensionale Itôformel

   a) Es seien $(W_i(t), t \geq 0),\ i = 1, 2$ zwei voneinander unabhängige Standard-Wienerprozesse über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\big(X_i(t),\ t \geq 0\big),\ i = 1, 2$ zwei Itô-Prozesse der Form

   $$dX_i(t) = f_i(t)\, dt + g_i(t)\, dW_i(t) \quad t \geq 0,\ i = 1, 2$$

   mit $f_i \in \mathscr{L}^1_\omega\left([0, \infty]\right),\ g_i \in \mathscr{L}^2_\omega\left([0, \infty]\right)$. Weiterhin sei $F = F(t, x_1, x_2)|_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^2}$ eine reellwertige $C^{1,2,2}$-stetige Funktion.
   Man überlege sich, daß gilt:

   $$\begin{aligned} F\big(t, X_1(t), X_2(t)\big) &= F\big(0, X_1(0), X_2(0)\big) \\ &+ \int_0^t F_t\big(s, X_1(s), X_2(s)\big)\, ds + \sum_{i=1}^2 \int_0^t F_{x_i}\big(s, X_1(s), X_2(s)\big)\, dX_i(s) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \int_0^t F_{x_i x_i}\big(s, X_1(s), X_2(s)\big) g_i^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

   b) Man zeige mittels a), daß gilt:

   $$d\big(X_1(t), X_2(t)\big) = X_1(t)\, dX_2(t) + X_2(t)\, dX_1(t), \quad t \geq 0.$$

   c) Welche Formeln würden sich in a) und b) ergeben, wenn
   $W_1(t) = W_2(t) =: W(t),\ t \geq 0$ gilt?

2. Es sei $(Y_t, t \geq 0)$ die Lösung der Differenzialgleichung

$$dY_t = g_t Y_t \, dW_t, \quad Y_0 = 1, \quad \text{d.h.}$$
$$Y_t = \exp\left\{ \int_0^t g_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t g_s^2 \, ds \right\}, \quad t \geq 0,$$

wobei $(g_t,\ t \geq 0) \in \mathscr{L}_\omega^2\big([0,\infty)\big)$ gelte (siehe Aufgabe 4.4.).
Es gelte $(f_t,\ t \geq 0) \in \mathscr{L}_\omega^1\big([0,\infty)\big)$. Zeigen Sie, daß

$$Z_t := F_t Y_t,\ t \geq 0 \quad \text{mit} \quad F_t = \exp\left\{ \int_0^t f_s \, ds \right\}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung

$$dZ_t = f_t Z_t \, dt + g_t Z_t \, dW_t, \quad t \geq 0, \ \ \text{ist.}$$

Es sei $r > 0$. Man löse die Differenzialgleichung

$$dU_t = f_t U_t \, dt + r \, dt + g_t U_t \, dW_t, \quad t \geq 0, \quad U_0 = x > 0.$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Differenzialgleichung für

$$V_t := \exp\left\{ -\int_0^t g_s \, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t g_s^2 \, ds \right\} U_t, \quad t \geq 0, \quad V_0 = x$$

her und bestimmen Sie deren Lösung trajektorienweise.

3. Es seien $(W(t), t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozess über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und r, K, β, x positive Konstanten.
Die logistische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = rx(t)\big(K - x(t)\big), \quad x(0) = x \tag{1}$$

wird als Modell für das Wachstum von Populationen vom Umfang $x(t)$ von Lebewesen in einer Umgebung verwendet, die die Kapazität K besitzt und deren Qualität durch r quantifiziert wird.
Unterliegt K schnellen zufälligen Fluktuationen, so modelliert man den Umfang $X(t)$ der Population durch

$$dX(t) = rX(t)\big(K - X(t)\big)\, dt + \beta X(t) \, dW_t, \quad X(0) = x. \tag{2}$$

Man leite aus (2) eine stochastische Differenzialgleichung für $Y_t := X_t^{-1},\ t \geq 0$ her und löse diese unter Verwendung von Aufgabe 2.
Bestimmen Sie nunmehr die Lösung $(X(t), t \geq 0)$ von (2).

4.* a) Man löse die Differenzialgleichung

$$dY_t = r\,dt + \alpha Y_t\,dW_t, \quad Y_0 = 1.$$

Hinweis: Man leite zunächst eine Differenzialgleichung für

$$Z_t = Y_t \exp\left\{-\alpha W_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}, \quad t \geq 0$$

her und löse diese trajektorienweise.

b) Mit der gleichen Methode löse man die Differenzialgleichung

$$dX_t = \frac{1}{X_t}\,dt + \alpha X_t\,dW_t, \quad t \geq 0,\ X_0 = 1.$$

5.* a) Es seien $(W(t), t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und a, b positive Zahlen. Durch

$$X_1(t) = a \cos W_t, \quad X_2(t) = b \sin W_t, \quad t \geq 0$$

ist ein zweidimensionaler Prozeß $X(t) = \big(X_1(t), X_2(t)\big)^T,\ t \geq 0$, definiert. Man zeige, daß $(X(t),\ t \geq 0)$ Lösung der Differentialgleichung

$$dX(t) = -\frac{1}{2}X_t\,dt + MX(t)\,dW_t, \quad X(0) = (a, 0)^T \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Beschreiben Sie die Bahn des Prozesses $X(t),\ t \geq 0$ in der Ebene.

b) Welcher Differenzialgleichung genügt $Y(t) = \big(\cosh W_t, \sinh W_t\big)^T,\ t \geq 0$?