Prof. Dr. Uwe Küchler

Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

8. Übung, 6. 02. 2006

1. Es sei $(X_t,\ t \geq 0)$ ein eindimensionaler Diffusionsprozess mit Drift $b(\cdot)$ und Diffusion $\sigma^2(\cdot)$. Man bestimme eine stochastische Differenzialgleichung für

$$Y_t = p(X_t), \quad t \geq 0,$$

wobei p die Skala von (X_t) bezeichne, und zeige, daß (Y_t) eine natürliche Skala hat.

2. Man zeige, daß die von einer Itôschen Diffusion erzeugte Halbgruppe $(T_t, t \geq 0)$ stark stetig ist, d.h.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |T_t f(x) - f(x)| \xrightarrow{t \downarrow 0} 0, \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}.$$

3. Es sei $(X_t,\ t \geq 0)$ eine geometrische Brownsche Bewegung, d.h., es gelte

$$dX_t = bX_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t, \quad X_0 = x > 0. \tag{1}$$

   a) Man zeige, daß gilt:

$$b < \frac{\sigma^2}{2} \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} X_t^x = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$
$$b > \frac{\sigma^2}{2} \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} X_t^x = \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$
$$b = \frac{\sigma^2}{2} \Longrightarrow \liminf_{t \to \infty} X_t^x = 0, \quad \limsup_{t \to \infty} X_t^x = \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

   Hinweis: Man nutze das Gesetz des iterierten Logarithmus für den Standard Wienerprozess:

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

b) Man bestimme den infinitesimalen Operator A von (X_t) auf $C_0^2(\mathbb{R})$.

c) Wie lauten Skala und Geschwindigkeitsmaß?

d) Für a, b, x mit $0 < a < x < b$ berechne man die Größen

$$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b), \qquad \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a), \qquad \mathbb{E}_x(\tau_{(a,b)}).$$

e) Was ergibt sich in c) für $a \downarrow 0$ bzw. $b \uparrow \infty$? (Unterscheiden Sie die drei Fälle aus Aufgabe a).)

f) Es sei $p > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
b < \frac{(1-p)\sigma^2}{2} &\iff \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_t|^p\big) = 0,\\
b = \frac{(1-p)\sigma^2}{2} &\iff \mathbb{E}\big(|X_t|^p\big) = |x|^p, \quad \forall t \geq 0,\\
b > \frac{(1-p)\sigma^2}{2} &\iff \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_t|^p\big) = \infty.
\end{aligned}$$

Hinweis: Man berechne $\mathbb{E}\big(|X_t|^p\big)$ mittels der expliziten Lösung von (1), siehe 4. Übungen.

4. Ist $(W_t\,,\ t \geq 0)$ ein reellwertiger Standard Wienerprozess und $\lambda > 0$, so bildet

$$M_t = \exp\left\{\sqrt{2\lambda}W_t - \lambda t\right\}, \quad t \geq 0,$$

ein positives Martingal (Beweis?). Es sei $a > 0$ und $\tau_a = \{\inf t > 0\ :\ W_t = a\}$. Dann ist τ_a eine Stoppzeit und für jedes $u > 0$ ist $\tau_a \wedge u$ eine beschränkte Stoppzeit. Folglich bildet $(M_{\tau_a \wedge u}\,,\ t \geq 0)$ ein beschränktes Martingal. Man berechne damit

$$g(\lambda) := \mathbb{E}\left(\exp\{-\lambda\tau_a\}\right), \quad \lambda > 0.$$

Die Funktion $g(\cdot)$ ist die Laplacetransformierte der Verteilungsfunktion von τ_a:

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathbb{P}(\tau_a \in dt), \quad \lambda > 0.$$

Man zeige, daß τ_a die Dichte

$$f(t,a) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}, \quad t \geq 0$$

besitzt.