Übungsblatt 10

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 7.1.2016

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Welche der folgenden Reihen sind konvergent? Welche absolut konvergent?

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(3+\frac{1}{k})^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \cdot k!}{k^k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k}^k$

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

i) $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n + 4^n)\, z^n$

ii) $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5)^n}{n^2+2n}$

b) Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

und diskutieren Sie für $k \geq 2$ die Konvergenz auf dem Rand des Konvergenzkreises.

Aufgabe 3 (2+3+5 Punkte) Für eine reelle Zahl a betrachten wir die *Binomialreihe*

$$B_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n \; = \; 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \dots \,, \qquad \text{wobei } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $B_m(z) = (z+1)^m$.

b) Ist $a \notin \mathbb{N}$, so ist der Konvergenzradius von $B_a(z)$ gleich 1.

c) $B_a(z) \cdot B_b(z) = B_{a+b}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zum Beweis benötigen Sie die folgende Formel, die Sie (als Bestandteil dieser Aufgabe) durch vollständige Induktion über n beweisen können:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Bitte wenden...

Weihnachtsaufgabe (5+5 Punkte)

a) Ferdi bekommt auch dieses Weihnachten wieder sehr viele Geschenke, nämlich abzählbar unendlich viele. Die Pakete, die alle würfelförmig sind, stellt Ferdi mit dem größten, das einen Meter hoch ist, beginnend, nach Größe geordnet in einer Reihe unter dem Tannenbaum auf. Er stellt dabei fest, dass die Pakete jeweils ein Drittel so breit sind wie das vorherige. Wie weit müssen die Äste des Tannenbaums mindestens ragen, wenn alle Pakete unter dem Baum Platz finden? Beim Auspacken stellt Ferdi fest, dass er beim nachfolgenden Paket immer nur jeweils die Hälfte der Zeit braucht. Wie lange hat Ferdi für das erste Paket gebraucht, wenn er, gierig wie er ist, schon nach 2 Minuten alles ausgepackt hat?

b) Heini bekommt zu Weihnachten von seinem Patenonkel, der unter Heinis Streichen viel leiden musste, einen Würfel von einem Kubikmeter Größe geschenkt. Heini braucht zum Auspacken eine Minute, und im Allgemeinen hängt die Zeit, die Heini zum Auspacken braucht, proportional von der Oberfläche des Päckchens ab. Als er das Paket geöffnet hat, ist in dem Karton wieder ein eingepackter Würfel und $\frac{7}{8}\mathrm{m}^3$ Luft. Und so geht es weiter. Nach dem n-ten Auspacken findet Heini wieder ein würfelförmiges Päckchen und $\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}\mathrm{m}^3$ gähnende Leere. Heini versucht, die leeren Kartons aufeinander zu stapeln. Gelingt ihm das? Zudem machen die Eltern sich Sorgen, ob Heini denn rechtzeitig zum Abendspaziergang zum Onkel mit dem Auspacken fertig sein wird. Packt Heini noch an Neujahr? Und warum ist Heini nachher so enttäuscht, dass er nicht mehr mit zum Onkel will?

Das Team der Analysis I*-Vorlesungen wünscht Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 15.-18.12. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

Überprüfen sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{1+3^{2n}}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$

Aufgabe Ü2

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender komplexer Potenzreihen:

a) $P_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$

b) $P_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot (z+2)^n.$

c) $P_3(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (z-z_0)^{n^2}.$

Aufgabe Ü3

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1$ außer evenuell 1 konvergiert.

Hinweis: Nutzen Sie das Cauchy-Kriterium für die Reihe $(1-z)A(z)$.