Übungsblatt 14

Analysis I* WS 2015/2016

(Abgabe: 04.02.2016)

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)

a) Berechnen Sie für $a > 0$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$.

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{|x - 2| - 1}$.

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{2x}$.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

a) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\log x}$$

und

$$g : (1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (\log x)^x.$$

b) Berechnen Sie für jedes $n \geq 1$ die n-te Ableitung der Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \exp(2x).$$

Hinweis: Stellen Sie eine allgemeine Formel auf und beweisen Sie diese mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, dann ist f Lipschitz-stetig.

b) Entscheiden Sie, ob die Aussage von a) ihre Gültigkeit behält, wenn man das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch das offene Intervall (a, b) ersetzt. Begründen Sie!

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 26.01-29.01 besprochen werden:

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

- $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^n - 1}{z^m - 1}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $m, n \in \mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^r}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x + 5})$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \lfloor x + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \rfloor$, wo für eine reelle Zahl y der Ausdruck $\lfloor y \rfloor$ als die größte ganze Zahl n definiert ist, für welche $n \leq y$ gilt.

b) Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

c) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Zeigen Sie: Gilt $f'(b) \neq 0$ für ein $b \in \mathbb{R}$, dann existert $\delta > 0$, so dass für alle $0 < h < \delta$ gilt: $f(b)$ liegt zwischen $f(b-h)$ und $f(b+h)$ (d. h. eine der beiden Ungleichungsketten $f(b-h) < f(b) < f(b+h)$ oder $f(b-h) > f(b) > f(b+h)$ ist erfüllt).
- Gilt die Umkehrung der letzteren Aussage?