Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 15

Analysis I WS 2015/2016

Abgabe: 11.2.2016

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)
Berechnen Sie folgende Grenzwerte (falls diese existieren)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \qquad n, m \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\log x}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x} \qquad n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 2 (3+1, 2+2+2 Punkte)

a) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Ist $f(a) > g(a)$ oder $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt auch $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (a,b]$.

b) Zeigen Sie damit folgende Ungleichungen:

- $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ für $x \in (0,\infty)$
- $1 + x \leq e^x$ für $x \in \mathbb{R}$
- $\log x \leq 2\sqrt{x} - 2$ für $x \in (0,\infty)$.

Aufgabe 3 (4+4+2+1 Punkte)
(a) Diskutieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-x}$, d.h. bestimmen Sie eventuelle Minima oder Maxima der Funktion.
(b) Bestimmen Sie ihr Konvergenzverhalten $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
(c) Skizzieren Sie den Graphen.
Zusatz: Entscheiden Sie, über welchen Intervallen f konkav bzw. konvex ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 2.2.-5.2. besprochen werden:

Aufgabe 4
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Aufgabe 5
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und (falls existend) $F(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$. Beweise oder widerlege:

a) Ist f differenzierbar in x, so gilt $f'(x) = F(x)$.

b) Existiert $F(x)$, so ist f differenzierbar in x.

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$.

Aufgabe 7
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (falls diese existieren):

- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) \qquad n, m \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(\sin 3x)}{\log(\sin 2x)}$.

Aufgabe 8
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion für die es Konstanten $k, K > 0$ gibt, sodass

$$k \cdot f(x) \leq f'(x) \leq K \cdot f(x) \qquad \text{und} \qquad f(x) > 0 \qquad \text{für alle } x.$$

Dann gilt für alle $x \in [0, \infty)$: $\quad f(0) \cdot e^{kx} \leq f(x) \leq f(0) \cdot e^{Kx}$.

Aufgabe 9
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \gamma$.
(Achtung: f' muss nicht stetig sein. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := f(x) - \gamma \cdot x$.)

Aufgabe 10
Konstruiere eine Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ die 2-mal differenzierbar ist mit

- $f(0) > f(x)$ für alle $x \neq 0$, d.h. 0 ist die Maximumstelle von f.
- Es gibt kein $\varepsilon > 0$ sodass f auf $[0, \varepsilon)$ monoton fallend ist.
- Es gibt kein $\varepsilon > 0$ sodass f auf $(-\varepsilon, 0]$ monoton wachsend ist.