Übungsblatt 3

Analysis I* WS 2015/2016

Abgabe: 5.11.2015

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b die folgenden Ungleichungen gelten. Wann gilt jeweils die Gleichheit?

a) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$,

b) $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$.

c) Für positive a, b gilt: $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Der Binomialkoeffizient $\binom{x}{k}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^0$ ist definiert als 1 falls $k = 0$ und für $k \geq 1$ als

$$\binom{x}{k} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-(k-1))}{k!}.$$

Beweisen Sie folgende Formeln für den Binomialkoeffizienten

a) $\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$

b) $\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k} \dfrac{x+1}{k+1}$

c) $\binom{x}{k+1} = \binom{x}{k} \dfrac{x-k}{k+1}$

d) $\binom{x}{k}\binom{k}{l} = \binom{x}{l}\binom{x-l}{k-l}$ für $l \leq k$.

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte)
Zeigen Sie folgende Aussagen mitttels vollständiger Induktion.

a) Es gibt genau $\binom{n-k+1}{k}$ Möglichkeiten k Zahlen aus der Menge $\{1, ..., n\}$ auszuwählen, sodass darunter keine zwei benachbarten sind.

b) Es seien $x_1, ..., x_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Es folgt aus Aufgabe 1, dass für alle positiven a, b gilt: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 27.10-30.10 besprochen werden:

Aufgabe 4
Bestimmen Sie jeweils die Menge aller natürlichen Zahlen n für die folgende Ungleichungen gelten

a) $2^n \geq 2n + 1$,

b) $n! \geq 2^n$.

Beweisen Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 5
Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper mit mindestens 2 Elementen, $0 \in \mathbb{K}$ bezeichne das neutrale Element der Addition und $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ die folgenden Rechenregeln gelten:

a) $0 \cdot a = 0$

b) $(-1) \cdot a = -a$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

d) $1 > 0$

e) Aus $b > 0$ folgt $\frac{1}{b} > 0$.

f) Aus $a > b$, $c > d$ folgt $a + c > b + d$. (Hier ist $b = 0$ oder $d = 0$ zugelassen.)

g) Aus $a > b \geq 0$ und $c > d \geq 0$ folgt $ac > bd$.

h) $a^2 \geq 0$, wobei die Gleichheit genau für $a = 0$ gilt.

Hinweis: Die letzten 3 Punkte sind 6) und 7) aus Satz 9.

Aufgabe 6
Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz.

$$\forall a, b \in \mathbb{K}\, \forall n \in \mathbb{N}^0 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$