Übungsblatt 4

Analysis I* WS 2015/2016

(Abgabe: 12.11.2015)

Aufgabe 1 (6 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Entscheiden Sie, ob diese angenommen werden.

(i) $A := \{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 1\}$.

b) Es seien $C, D \subset \mathbb{R}^+$ nichtleere beschränkte Mengen positiver reeller Zahlen. Es sei

$$C \cdot D := \{c \cdot d \mid c \in C, d \in D\}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\sup(C \cdot D) = \sup C \cdot \sup D.$$

Aufgabe 2 (2 + 8 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $a < b$ gilt:

(i) Es existieren unendlich viele rationale Zahlen q mit $a < q < b$.

(ii) Es existieren unendlich viele irrationale Zahlen x mit $a < x < b$.
Hinweis: Nutzen Sie, dass es eine rationale Zahl q mit $a < q < b$ gibt, (mindestens) eine positive irrationale Zahl c existiert und dass nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ exisitert mit $\frac{1}{n} < \frac{b-q}{c}$.

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

b) Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

(i) $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x - y|}$.
(ii) $\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 03.11-06.11 besprochen werden:

- Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Entscheiden Sie, ob diese angenommen werden.

  a) $A := \sup\{2^{-n}n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

  b) $B := \{\frac{1}{a} + (-1)^n : a \in \mathbb{R}, a > 1, n \in \mathbb{N}\}$.

- Beweisen Sie, dass für alle beschränkten nichtleeren Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt:

  (i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ und $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
  (ii) Falls $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

  Geben Sie ein Beispiel von A und B mit $\sup(A \cap B) < \min(\sup A, \sup B)$ an.

- Seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und bezeichne

  $$A + B = \{a + b : A \in A, b \in B\}.$$

  Zeigen Sie: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

- Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$.