
Übungsblatt 6

Analysis I* WS 2015/2016

(Abgabe: 26.11.2015)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

- (i) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$. und $M := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = iz\}$. Bestimmen und skizzieren Sie $f(M) \subset \mathbb{C}$.
(ii) Sei $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. und $N := \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$. Bestimmen und skizzieren Sie $g(N) \subset \mathbb{C}$.

Begründen Sie jeweils!

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

- (i) Sei $x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von x und y , d.h. explizit als Funktion dieser Variablen alle $u, v \in \mathbb{R}$ mit $(u + iv)^2 = x + iy$.
(ii) Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ und betrachte $f(z) := z^2$ für $z \in \mathbb{H}$. Bestimmen Sie $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass $f : \mathbb{H} \rightarrow f(\mathbb{H})$ eine Bijektion ist. Was ist die Umkehrabbildung von f ?

Aufgabe 3 (2+2+3+3 Punkte)

Untersuchen Sie die unten angegebenen reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Verwenden Sie für Ihre Begründung nur Fakten aus der Vorlesung oder den Übungen.

- (i) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $b_n = \frac{(-1)^n + 2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $c_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.
(iv) $d_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 17.11-20.11 besprochen werden:

- Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}/z$. Was ist das Bild von f ? Bestimmen Sie $f^{-1}(M)$ für

$$M = \{z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0\}.$$

- Zeigen Sie, dass durch

$$f : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

eine bijektive Abbildung der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ definiert ist. Was ist die Umkehrabbildung von f ?

- Untersuchen Sie die unten angegebenen reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Verwenden Sie für Ihre Begründung nur Fakten aus der Vorlesung oder den Übungen.

(i) $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$

(iii) $c_n = \frac{2n-n^2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$

- (iv) Eine Folge $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $d_1 = 1$ und $d_{n+2} = d_{n+1}d_n$ für alle $n \geq 1$. Das Konvergenzverhalten soll in Abhängigkeit von $d_2 \in \mathbb{R}$ untersucht werden.