
Probeklausur

Analysis I* WS 2015/2016

Stellen Sie Klausurbedingungen her: keine Hilfsmittel, 180 Minuten ohne Unterbrechungen störungsfreie Zeit. Versuchen Sie, die gestellten Aufgaben in dieser Zeit zu lösen. Markieren Sie sich die Stelle Ihrer Lösung, die Sie nach 180 Minuten erreicht haben. Lösen Sie die Probeklausur in jedem Fall zu Ende. Antworten sind zu begründen, Lösungswege müssen nachvollziehbar sein. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte dürfen verwendet werden, es sei denn, Sie sollen diese selbst herleiten. Sie müssen dies dann geeignet anzeigen. Es wird Musterlösungen geben. Tauschen Sie Ihre Lösungen untereinander aus und korrigieren Sie sich diese gegenseitig.

Aufgabe 1 (1+3+2+2+2 Punkte)

- (0) Geben Sie die Definition zur KOnvergenz einer Folge aus der Vorlesung an.
- (1) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Formulieren und beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung über die Konvergenz der Folge der Produkte $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:
- (a) $\left(\frac{2\sqrt[3]{n^2+3\sqrt{n}}}{5\sqrt[3]{n^2+\sqrt{2n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- (b) $\left(\frac{(-n)^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- (c) $\left(\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

- (1) Skizzieren Sie die folgenden Mengen K und \mathbb{H} in der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} :

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

- (2) Sei die Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Zeigen Sie, dass das Bild $\operatorname{Im}(f)$ bzw. $f(\mathbb{H})$ in K enthalten ist: $\operatorname{Im}(f) \subseteq K$.

- (3) Beweisen Sie, dass $f : \mathbb{H} \rightarrow K$ eine bijektive Abbildung ist. Berechnen Sie die Umkehrabbildung.

Aufgabe 3 (5+2+1+2 Punkte)

- (1) Formulieren und beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung.
- (2) Ermitteln Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $n^{n+1} > (n+1)^n$ ist.
- (3) Begründen Sie, dass $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ab einem bestimmten Folgenglied eine monoton fallende Folge ist. Was folgt daraus für das Konvergenzverhalten der Folge?
- (4) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge in (3). Sie dürfen die entsprechende Aussage der Vorlesung nicht verwenden.

Aufgabe 4 (3+3+2+2 Punkte)

- (1) Berechnen Sie für die folgenden Reihen die Partialsummenfolgen. Existiert der Grenzwert? Falls ja, ermitteln Sie diesen.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$.

- (2) Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind. Sind sie konvergent?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.