Übungsblatt 8

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
a) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix der ersten Fundamentalform von S^2 bzgl. der stereographischen Projektion vom Nordpol aus. Bestimmen Sie die zugehörige Gramsche Determinante.
b) Berechnen Sie mithilfe von a) den Flächeninhalt der 2-Sphäre.

Lösung

a) Wir betrachten also die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S^2 \setminus \{N\} \\ & x = (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right). \end{array}$$

Die Gramsche Matrix ist definiert durch

$$G = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}(2(x^2+y^2+1) - 2x2x, -2y2x, 2x(x^2+y^2+1) - (x^2+y^2-1)2x) \\ &= \frac{2}{(x^2+y^2+1)^2}(-x^2+y^2+1, -2xy, 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{(x^2+y^2+1)^2}(-2xy, x^2-y^2+1, 2y) \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die einzelnen Einträge der Gramschen Matrix:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \rangle &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}((-x^2+y^2+1)^2 + 4x^2y^2 + 4x^2) \\ &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}(x^4+y^4+1-2x^2y^2-2x^2+2y^2+4x^2y^2+4x^2) \\ &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}(x^4+y^4+1+2x^2y^2+2x^2+2y^2) \\ &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}(x^2+y^2+1)^2 = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}(-2xy(-x^2+y^2+1) - 2xy(x^2+y^2+1) + 4xy) \\ &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^4}(2x^3y - 2xy^3 - 2xy - 2x^3y + 2xy^3 - 2xy + 4xy \\ &= 0 \\ \langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle &= \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Gramsche Matrix

$$G = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für die Gramsche Determinante

$$detG = \frac{16}{(x^2+y^2+1)^4}.$$

b) Wir nutzen, dass der Nordpol $\{N\} \subset S^2$ eine Nullmenge ist und unsere Erkenntnisse aus a). Dann gilt:

$$\begin{aligned} vol(S^2) = vol(S^2 \setminus \{N\}) &= \int_{S^2} 1dM \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{|detG|}dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy. \end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich am einfachsten lösen, indem wir Polarkoordinaten einführen. Wir nutzen also die Transformationsformel für die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & (0,\infty)\times(0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\varphi) & \longmapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

Dann gilt $detdF_{(r,\varphi)} = r$ und:

$$\begin{aligned} vol(S^2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{4}{(r^2+1)^2} r d\varphi dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{2r}{(r^2+1)^2} dr \\ &= 4\pi \left(-\frac{1}{r^2+1}\right)_0^\infty \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$