

---

# Übungsblatt 7

## Komplexe Analysis und dynamische Systeme SS 2017 Übung am 15.06.

---

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Menge der meromorphen Funktionen  $\mathcal{M}(\Omega)$  auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Körper ist. Summe, Produkt und Reziprokes stimmen dabei mit ebendiesen punktweise definierten Operationen überall dort überein, wo letztere definiert sind (siehe präzisere Aufgabenstellung in Vorlesung oder Salamons Skript, Übungen 4.61, 4.62 und 4.63.).

### Aufgabe 2

(Sei die abgeschlossene Einheitskreisscheibe  $\bar{\Delta} \subset \Omega$  in der offenen Menge  $\Omega$  enthalten. Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $|f(z)| < 1$  für alle  $z$  mit  $|z| = 1$ . Zeigen Sie, dass dann  $f$  genau einen Fixpunkt in der offenen Kreisscheibe  $\Delta$  besitzt.

### Aufgabe 3 [Die Bergmannsche Formel]

Für jede beschränkte holomorphe Funktion  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{zf(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2 \zeta} dx dy,$$

wobei das Integral das Integral in  $\mathbb{R}^2$  ist (Lebesgue oder Riemann).

Hinweis: Polarkoordinaten und Residuensatz. Versuchen Sie herauszufinden, ob diese Formel, die in Salamons Skript (Aufgabe 4.73) oder eine ganz andere korrekt ist...

### Aufgabe 4

(i) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es genau dann eine holomorphe Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e^g = f$  gibt, wenn für jede geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $\Omega$  die Windungszahl  $w(f \circ \gamma, 0) = 0$  ist.

Hinweis: Schauen Sie sich die Beweise der Folgerung von Satz 26 und Lemma 35 an. (ii) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Zeigen Sie, dass es genau dann eine holomorphe Funktion  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h^n = f$  gibt, wenn für alle geschlossenen Kurven  $\gamma$  in  $\Omega$  die Windungszahl  $w(f \circ \gamma, 0)$  durch  $n$  teilbar ist.

Hinweis: Für  $z_0 \in \Omega$  sei  $w_0 \in \mathbb{C}$  mit  $w_0^n = f(z_0)$  fixiert. Definieren Sie  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h(z_0) := w_0$  und für  $z \in \Omega$

$$h(z) := w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right),$$

wobei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  stückweise differenzierbar,  $\gamma(0) = z_0$  und  $\gamma(1) = z$ . Zeigen Sie, dass  $h(z)$  nicht von  $\gamma$  abhängt, holomorph ist und die geforderte Gleichung erfüllt.

(iii) Entscheiden Sie, ob der Logarithmus der Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

auf

(a)  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$

(b)  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

existiert und begründen Sie.

Hinweis: Benutzen Sie (i). Falls Sie keine Lösung sehen, kann als Zwischenschritt auch Aufgabe 4.76

(a) aus Salamons Skript hilfreich sein.

(iv) Entscheiden Sie, ob die Quadratwurzel der Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

auf (a)  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$

(b)  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

existiert und begründen Sie.

Hinweis: Benutzen Sie (i). Falls Sie keine Lösung sehen, kann als Zwischenschritt auch Aufgabe 4.76

(b) aus Salamons Skript hilfreich sein.