Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Aufgabe 1 **2 Punkte**
Beweisen Sie, dass das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M Vektorbündel sind.

Die folgenden Aufgaben werden in der Übung behandelt:

Aufgabe 2 (Seifert-Faserung von S^3)
Sei $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{CP}^1$ definiert durch $(z_1, z_2) \mapsto [z_1^2 : z_2]$ und sei π die Einschränkung $\tilde{\pi}|_{S^3}$.
Beweisen Sie dass $\pi : S^3 \to S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ eine Blätterung ist, d.h. die Fasern $\pi^{-1}(p)$ sind alle paarweise homöomorph. Zeigen Sie außerdem, dass dies trotzdem kein Faserbündel ist und überlegen Sie sich warum nicht.

Aufgabe 3
Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer nicht-ausgearteten, antisymmetrischen Bilinearform ω. Zeigen Sie, dass dann $\dim V$ gerade ist. Finden Sie außerdem eine geeignete Basis zur Darstellung von ω.

Aufgabe 4 (fast-komplexe Struktur)
Es sei V ein reeller Vektorraum und $J : V \to V$ ein Endomorphimus mit $J \circ J = -1$. Zeigen Sie, dass man dann V die Struktur eines komplexen Vektorraums geben kann, die die ursprüngliche reelle Struktur erweitert. Falls $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} V$ und vergleichen mit $\dim_{\mathbb{C}} C \otimes V$.