Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 26.06.2013

Aufgabe 31
Sei X eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Sei $p \in X$ ein Punkt. Der Normalenraum an X in p ist der Quotientenraum

$$N_pX := T_pM/T_pX\,,$$

und das Normalenbündel von X in M ist das Vektorbündel NX über X mit Fasern N_pX.

a) Zeigen Sie, dass NX tatsächlich ein Vektorbündel über X mit $rk(NX) = n - k$ ist.

b) Zeigen Sie, dass man für $M = \mathbb{R}^n$ den Raum N_pX mit dem üblichen Normalenraum an X, d.h. dem orthogonalen Komplement von T_pX in T_pM, identifizieren kann.

Aufgabe 32 - Tubenumgebungssatz in $\mathbb{R}^n$ **2 + 2 + 2 Punkte**
Sei X eine kompakte, k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Wir werden zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ von X gibt, die diffeomorph zum ε-Ball NX_ε um den Nullschnitt im Normalenbündel NX ist, d.h U_ε ist diffeomorph zu $X \times B_\varepsilon^{n-k}$, wobei $B_\varepsilon^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ der ε-Ball ist.

a) Sei $\varepsilon > 0$ und sei U_ε die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^n$ deren Abstand zu X kleiner gleich ε ist. Zeigen Sie, dass für genügend kleine ε jeder Punkt $p \in U_\varepsilon$ genau einen am nächsten liegenden Punkt $\pi(p) \in X$ hat.

b) Sei ε genügend klein, sodass $\pi : U_\varepsilon \to X$ wie in (a) wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass für $p \in U_\varepsilon$ die verbindende Strecke $(1-t) \cdot p + t \cdot \pi(p), 0 \leq t \leq 1$, ganz in U_ε liegt.

c) Sei $NX_\varepsilon = \{(p, v) \in NX \text{ mit } |v| < \varepsilon\}$, wobei $v \in (T_pX)^\perp$. Sei $\exp : NX \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $(p, v) \mapsto p + v$ und sei $\nu : NX_\varepsilon \to X$ die Abbildung $(p, v) \mapsto p$. Zeigen Sie, dass für ε klein genug, exp einen Diffeomorphismus zwischen NX_ε und U_ε liefert und dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} NX_\varepsilon \arrow[rr, "\exp"] \arrow[dr, "\nu"'] & & U_\varepsilon \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 33
Sei nun X wie oben, aber nicht kompakt. Zeigen Sie, dass exp immernoch ein Diffeomorphismus ist, wenn man die Konstante ε durch eine stetige Funktion $\varepsilon : X \to \mathbb{R}^+$ ersetzt, die für p gegen "unendlich" schnell genug gegen 0 geht.