Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 10.07.2013

Aufgabe 37 **1 + 1 + 2 Punkte**

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Nehmen Sie an, dass ω exakt ist, d.h. dass es eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1(M)$ gibt, mit $\omega = d\lambda$. Zeigen Sie:

a) M ist nicht kompakt.

b) Es gibt ein eindeutiges Vektorfeld $Y \in \Gamma(TM)$ mit $\iota_Y \omega = \omega(Y, \cdot) = \lambda$.
(Y ist das Lioville-Vektorfeld von $(M, d\lambda)$)

c) Sei ϕ^t der (lokale) Fluss von Y, d.h. $\phi^t(p)$ ist die eindeutige Kurve, die die Differenzialgleichung $\frac{d}{dt}\phi^t(p) = Y(\phi^t(p))$ und $\phi^0(p) = p$ für t nahe 0 löst. Sei g ein Symplektomorphismus, der λ erhält, d.h. $g^*\lambda = \lambda$. Dann kommutieren g und ϕ, d.h.

$$\phi^t \circ g = g \circ \phi^t.$$

Aufgabe 38 **2 Punkte**

Sei X eine beliebige n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $M := T^*X$. Sei $(U; x_1, x_2, ..., x_n)$ eine Koordinatenumgebung auf M und seien $(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ die zugehörigen Koordinaten auf T^*U.
Sei θ die tautologische 1-Form auf M, die über U durch $\theta|_U = \sum \xi_i dx_i$ gegeben ist.
Zeigen Sie, dass das Lioville-Vektorfeld von M über U durch $Y = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ gegeben ist.
Sei ϕ^t der Fluss von Y. Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $p = (x, \xi) \in M$ gilt:

$$\phi^t(p) = (x, e^t \cdot \xi).$$

Aufgabe 39

Sei $M = T^*X$ wie oben. Zeigen Sie: Ist g ein Symplektomorphismus von M, der θ erhält, so gilt:

$$g(x, \xi) = (y, \eta) \Rightarrow g(x, \lambda\xi) = g(y, \lambda\eta) \qquad \forall (x, \xi) \in M, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folgern Sie, dass g die Kotangenten-Faserung erhält, d.h. zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus $f : X \to X$ gibt, mit $\pi \circ g = f \circ \pi$, wobei $\pi : M = T^*X \to X$ die Projektion ist. Zeigen Sie schließlich, dass g der symplektische Lift von f ist.
(Hinweis: Für $g(p) = q$, zeigen und nutzen Sie die Identitäten $(Dg_p)^*\theta_q = \theta_p$ und $D\pi_q \circ Dg_p = Df_{\pi(p)} \circ D\pi_p$.)