Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Zum Selbststudium

Aufgabe 40 - Lieableitung
Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Es bezeichne ϕ^t den lokalen Fluss von X. Sei ferner $\mathfrak{T} \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$ ein beliebiger Tensor (z.B. eine k-Form oder ein Vektorfeld). Der pulback $(\phi^t)^*\mathfrak{T}$ ist dann definiert als

- $((\phi^t)^*\mathfrak{T})_p := (D\phi^t_p)^{-1}\mathfrak{T}_{\phi^t(p)}$, falls $\mathfrak{T}$ ein Vektorfeld ist.
- $((\phi^t)^*\mathfrak{T})_p(X_1, ..., X_n) := \mathfrak{T}_{\phi^t(p)}(D\phi^t_p X_1, ..., D\phi^t_p X_n)$, falls $\mathfrak{T}$ eine Multilinearform ist
- $(\phi^t)^*(\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{S}) = (\phi^t)^*\mathfrak{T} \otimes (\phi^t)^*\mathfrak{S}$ für gemischte Tensoren.

Dann ist die Lieableitung von $\mathfrak{T}$ in Richtung des Vektorfeldes X definiert durch:

$$\mathcal{L}_X \mathfrak{T}_p = \frac{d}{dt}(\phi^t)^*\mathfrak{T}_p\Big|_{t=0} := \lim_{t\to 0} \frac{((\phi^t)^*\mathfrak{T})_p - \mathfrak{T}_p}{t}.$$

Machen Sie sich klar, dass dies wohldefiniert ist, insbesondere dass im Zähler des Bruches tatsächlich die gewöhnliche Differenz genommen werden kann. Zeigen Sie außerdem:

- $\mathcal{L}_X\mathfrak{T}$ ist $\mathbb{R}$-linear in $\mathfrak{T}$.
- $\mathcal{L}_X f = \partial_X f \qquad \forall f \in C^\infty(M)$.
- $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
  (Hinweis: Wählen Sie für $X(p) \neq 0$ Koordinaten $(x_1, ..., x_n)$, sodass $\frac{\partial}{\partial x_1} = X$)
- $\mathcal{L}_X$ erfüllt die Leibnizregel, d.h. zeigen Sie $\mathcal{L}_X(\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{S}) = (\mathcal{L}_X\mathfrak{T}) \otimes \mathfrak{S} + \mathfrak{T} \otimes (\mathcal{L}_X\mathfrak{S})$.
- $\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \alpha \in \Omega^1(M)$.
- $\mathcal{L}_X\mathfrak{T}$ ist $\mathbb{R}$-linear in X. (Hinweis: Leibnizregel und Induktion nach dem Grad von $\mathfrak{T}$.)
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$.

Aufgabe 41 - Cartan's Magic formula
Seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $\alpha \in \Omega^k(M)$ eine k-Form. Das innere Produkt (Kontraktion) $i_X\alpha$ ist definiert durch $(i_X\alpha)(X_1, ...X_{n-1}) = \alpha(X, X_1, ..., X_{n-1})$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}_X\alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X\alpha). \qquad ((*))$$

Zeigen Sie dazu, dass $(*)$ für 0- und 1-Formen richtig ist. Nutzen Sie dann die Leibnizregel für eine Induktion über den Grad von α.

Aufgabe 42 - Äußeres Differential und kovariante Ableitung

Sei ω eine k-fache Multilinearform auf M, d.h. ω ist ein Tensor vom Typ $(0, k)$. Der Antisymmetriesator $\mathcal{A}$ ist ein Operator, der jeder k-fachen Multilinearform eine k-Form zuordnet, vermöge:

$$(\mathcal{A}\omega)(X_1, ..., X_k) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(k)} sgn(\pi) \cdot \omega(X_{\pi(1)}, ..., X_{\pi(k)}).$$

Dabei ist $\mathfrak{S}(k)$ die Permutationsgruppe von k Elementen. Zeigen Sie, dass für jede torsionsfreie kovariante Ableitung ∇ gilt: $(d\alpha) = \mathcal{A}(\nabla\alpha)$. Es gilt also insbesondere für $\alpha \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(d\alpha)(X, Y) = (\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X).$$

Nutzen Sie für den Beweis, dass gilt:

$$\begin{aligned}(d\alpha)(X_1, ..., X_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \partial_{X_i}(\alpha(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{k+1})) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{k+1}).\end{aligned}$$

Entwickeln Sie dann $\partial_{X_i}(\alpha(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{k+1}))$ mit Hilfe der kovarianten Ableitung ∇.