Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 24.04.2013

Aufgabe 5 **2 Punkte**
Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel vom Rang n, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine trivialisierende Überdeckung von B. Seien $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ zugehörigen Trivialisierungen und $g_{ij}(x) \in Gl(n,\mathbb{R}), x \in U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen. $Gl(n,\mathbb{R})$ heißt auch die **Strukturgruppe** von (E, B, π). Ist $H \subset Gl(n,\mathbb{R})$ eine Untergruppe und lassen sich Trivialisierungen ϕ_i so wählen, dass $g_{ij}(x) \in H$ für alle $x \in U_i \cap U_j, (i,j) \in I^2$, so ist die Strukturgruppe von (E, B, π) **auf** H **reduzierbar**.
Zeigen Sie: Ist $E = TM$ das Tagentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, $\dim M = n$, so ist die Wahl einer Riemannschen Metrik g auf M äquivalent zu einer Reduktion der Strukturgruppe von TM auf $O(n)$. (Hinweis für Rückrichtung: Konstruieren Sie ausgehend von $\{U_i\}$ eine Metrik auf M, indem Sie die Standardmetrik im $\mathbb{R}^n$ vermöge ϕ_i zurückziehen.)

Aufgabe 6 **2 Punkte**
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\dim M = 2n$. Auf $\mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$$

und definieren die folgenden Untergruppen von $Gl(2n,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} O(2n) &= \{A \in Gl(2n,\mathbb{R}) \mid A^t A = Id\} \\ Sp(2n) &= \{A \in Gl(2n,\mathbb{R}) \mid A^t \Omega A = \Omega\} \\ Gl(n,\mathbb{C}) &= \{A \in Gl(2n,\mathbb{R} \mid \Omega A = A\Omega\} \\ U(n) &= O(2n) \cap Sp(2n) \cap Gl(n,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass bereits gilt $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap Gl(n,\mathbb{C}) = O(2n) \cap Gl(n,\mathbb{C})$.
Welche Strukturen erhält man auf M, wenn sich die Strukturgruppe von TM auf $Sp(2n), Gl(n,\mathbb{C})$ oder $U(n)$ reduzieren lässt?

Aufgabe 7 **2 Punkte**
Es sei $\pi : L \to B$ ein Vektorbündel vom Rang 1. Zeigen Sie, dass (L, B, π) genau dann trivial ist, wenn es einen globalen Schnitt $\rho : B \to L, \pi \circ \rho = id$ gibt, sodass $\rho(x) \neq 0 \in \pi^{-1}(x)$ für alle $x \in B$ gilt. Wie lässt sich dieser Satz auf Vektorbündel vom Rang n verallgemeinern?