Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 29.04.2013 (Montag!)

Aufgabe 8 **2 Punkte**
Zeigen Sie, dass die Krümmung ein Tensor ist.

Aufgabe 9 **2 Punkte**
Sei (M, J) eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit, d.h. J ist ein glatter Vektorbündelendomorphismus von TM mit $J \circ J = -id$. Der zugehörige Nuijenhuis-Tensor $\mathcal{N}_J$ ist definiert als:

$$\mathcal{N}_J(v, w) := [Jv, Jw] - J[v, Jw] - J[Jv, w] - [v, w],$$

wobei v und w Vektorfelder auf M sind und $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer ist.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}_J$ wirklich ein Tensor ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}_J \equiv 0$, wenn M 2-dimensional ist. (Hinweis: Betrachte v und Jv.)

Besprechung der folgenden Aufgaben erfolgt nur auf Wunsch. Fragen können aber gestellt werden!

Aufgabe 10
Wir betrachten die Standard-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ ||x||^2 = 1\}$. Der Tagentialraum $T_x S^n$ lässt sich dann mit

$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1},\ < x, v >= 0\}$$

identifizieren, wobei $< x, v >$ das Standard-Skalarprodukt ist. Sei weiterhin $\pi : \epsilon \to S^n$ das triviale Vektorbündel über S^n vom Rang 1, d.h. $\epsilon = S^n \times \mathbb{R}$ und $\pi = pr_1$.

a) Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus \epsilon$ global trival ist, d.h. isomorph zu $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

b) Finden Sie für S^1, S^3 und S^7 je ein, drei bzw. sieben punktweise linear unabhängie Vektorfelder. Was bedeutet dies für TS^1, TS^3 bzw. TS^7?

c) In Aufgabe 11 wird gezeigt, dass jedes Vektorfeld auf S^{2n} mindestens eine Nullstelle besitzt. Welche Konsequenzen hat dies für TS^{2n}?

Aufgabe 11 - Satz vom Igel/Hairy Ball Theorem
Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld auf S^{2n} eine Nullstelle besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass wenn ein Vektorfeld ohne Nullstellen existiert, dann existiert eine Homotopie zwischen der Identität id auf M und der Involution $s : x \mapsto -x$.

- Sei ω eine Volumenform auf S^{2n}. Betrachten Sie das Integral $\int_{S^{2n}} s^*\omega$ und leiten Sie aus der Homotopie zwischen s und id einen Widerspruch ab.