Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 08.05.2013

Aufgabe 12 **4 Punkte**

Wir betrachten wie in der Vorlesung das tautologische Bündel θ über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, definiert durch

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \supset \theta \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \qquad \theta_{[x]} := \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ offen und $\sigma \in \Gamma(U, \theta) \subset \Gamma(U, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Schnitt von θ. Wir definieren eine kovariante Ableitung ∇ auf θ durch

$$\nabla\sigma := \mathrm{proj}_\theta^\perp(d\sigma),$$

wobei $d\sigma = (d\sigma_1, d\sigma_2, ..., d\sigma_{n+1})$ die komponentenweise Ableitung ist und $\mathrm{proj}_\theta^\perp$ die (faserweise) orthogonale Projektion auf θ bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

1. Zeigen Sie, dass θ ein Geradenbündel (Vektorbündel vom Rang 1) ist.
2. Beschreiben Sie die Zusammenhangs-1-Form in der Trivialisierung aus 1. und zeigen Sie, dass die Krümmung überall 0 ist.

Die folgenden Aufgaben werden in der Übung behandelt:

Aufgabe 13

Betrachte zunächst nur $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie dass die Kurve $\sigma : [0, 1] \to \theta$, gegeben durch:

$$\sigma(t) = \Big([\cos\pi t \,:\, \sin\pi t]\,;\, (\cos\pi t, \sin\pi t)\Big)$$

eingeschränkt auf $[0, 1)$ oder $(0, 1]$ ein globaler Schnitt von θ mit einer Sprungstelle ist. Schlussfolgern Sie, dass θ nicht trivial ist. Zeigen Sie, dass dann auch θ über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ nicht trivial ist.

Bemerkung: Die Identifizierung $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist durch die erste Komponente von σ gegeben.