Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 08.05.2013

Die Aufgaben mit Punkte sind schriftlich:

Aufgabe 14
Sei G eine Lie-Gruppe, $n = \dim G$ und $\mathfrak{g} = T_eG$ die zugehörige Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass die links- und die rechtsinvarianten Vektorfelder TG trivialisieren. **(2 Punkte)**
Es ist also $TG \cong G \times \mathfrak{g} \cong G \times \mathbb{R}^n$. Sei $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Gamma(G \times \mathbb{R}^n)$, $\sigma_i \in C^\infty(G)$ ein Schnitt. Der triviale Zusammenhang auf $G \times \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\nabla_X \sigma = (X\sigma_1, ..., X\sigma_n)$ für $X \in TG$. Bestimmen Sie die Torsion von ∇. Überlegen Sie sich, wie man aus einem Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ eine Metrik auf TG erhält und berechnen Sie deren Levi-Civita-Zusammenhang.

Aufgabe 15
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik e und zugehörigem Levi-Civita-Zusammenhang D. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $\Sigma := f^{-1}(0)$ eine glatte Hyperfläche von M, d.h. $df(p) \neq 0$ für alle $p \in \Sigma$. Sei g die von e induzierte Metrik auf Σ, d.h. g ist die Einschränkung von e auf $T\Sigma$. Zu einem Vektorfeld $X \in \Gamma(T\Sigma)$ bezeichne $\tilde{X}$ ein Vektorfeld auf M mit $\tilde{X}|_\Sigma = X$.

1) Für $X, Y \in T\Sigma$ und $p \in \Sigma$ definieren wir einen Operator ∇ durch

$$(\nabla_X Y)(p) := proj^{\perp}_{T_p\Sigma}\left(D_{\tilde{X}}\tilde{Y}(p)\right).$$

   Zeigen Sie, dass ∇ wohldefiniert und der Levi-Civita-Zusammenhang von g ist.
   (2 Punkte)

2) $N = \mathrm{grad} f / |\mathrm{grad} f|$ ist das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld an Σ, wobei $e(\mathrm{grad} f, \cdot) = df$ ist. Zeigen Sie, dass die durch die folgende Gleichung definierte Größe h ein wohldefinierter Tensor ist:

$$h(X,Y)N = D_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_X Y, \qquad X, Y \in \Gamma(T\Sigma).$$

   Zeigen Sie, dass $h(X,Y) = -e(D_{\tilde{X}}N, \tilde{Y})$ und $h(X,Y) = h(Y,X)$ gilt. Der Tensor h ist die 2. Fundamentalform der Hyperfläche Σ.

3) Zerlegen Sie für $X, Y, Z \in T\Sigma$ den Ausdruck $D_X(D_Y Z)$ in die Anteile die tangential bzw. normal zu Σ. Schlussfolgern Sie die Gleichungen von Gauß-Codazzi-Mainardi:

$$(\nabla_X h)(Y,T) = (\nabla_Y h)(X,T)$$
$$g(R_{X,Y}Z,T) = h(X,T)h(Y,Z) - h(X,Z)h(Y,T),$$

   Hier ist $X, Y, Z, T \in T\Sigma$ und R ist die Krümmung von ∇.