Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 22.05.2013

Aufgabe 16 **2 Punkte**
Zeigen Sie: Ein Hauptfaserbündel P ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt $\sigma \in \Gamma(P)$ gibt. Schlussfolgern Sie: Ein Vektorbündel E vom Rang k besitzt genau dann die Struktur eines $\mathbb{R}^k$-Hauptfaserbündels, wenn E trivial ist.

Aufgabe 17 **2 Punkte**
Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ in die Automorphismengruppe der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ abbildet, dass heißt, zeigen Sie:

$$[Ad(g)X, Ad(g)Y] = Ad(g)\left([X,Y]\right) \forall g \in G,\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Folgende Aufgaben werden in der Übung behandelt:

Aufgabe 18
Sei $\pi : P \to M$ ein H-Hauptfaserbündel. Überlegen Sie sich, wie man daraus ein G-Gruppenbündel $E \to M$ konstruieren kann, d.h. ein Faserbündel dessen Fasern lokal trivial die Gruppenstruktur von G besitzen. (Hinweis: Analogie zu Repère-Bündel vs. Vektorbündel) Zeigen Sie, dass man für $H = G$ und $\rho = id : G \to G$ wieder P erhält.

Aufgabe 19
Seien A_0, A_1 zwei Zusammenhangs-1-Formen auf einem G-Hauptfaserbündel $\pi : P \to M$. Sei $\mathrm{g} := P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ das assoziierte Lie-Algebrabündel. Dann ist $A_0 - A_1 \in \Omega^1(M, \mathrm{g})$. Überlegen Sie sich, warum $\Omega^1(M, \mathrm{g}) \subset \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und charakterisieren Sie das Bild.