Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 29.05.2013

Aufgabe 20
Sei $1 \leq k \leq n$. Es bezeichne $G_{n,k}$ die Menge der k-dimensionalen linearen Unterräume $L \subset \mathbb{R}^n$. Sie kann als Teilmenge von $M(n, \mathbb{R})$ aufgefasst werden, wenn man jedes L mit der orthogonalen Projektion auf L identifiziert.
Zeigen Sie, dass $G_{n,k}$ eine $k(n-k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M(n, \mathbb{R})$ ist.
(Hinweis: Betrachte die Abbildung $M(n, \mathbb{R}) \ni S \mapsto S^*S - 1 \in Sym(n, \mathbb{R})$, wobei $Sym(n, \mathbb{R})$ die symmetrischen $n \times n$ Matrizen sind.)
Die $G_{n,k}$ sind die rellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Es ist $G_{n,1} = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

Aufgabe 21
Das tautologische Bündel $\pi : \theta \to G_{n,k}$ ist eine Teilmenge von $G_{n,k} \times \mathbb{R}^n$, punktweise gegeben durch $\theta_L = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \in L\}$. Zeigen Sie, dass θ ein C^∞-Vektorbündel ist.

Aufgabe 22 **2 Punkte**
Sei M eine Mannigfaltigkeit und B ein Untervektorbündel über M des trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^n$ mit $rkB = k$. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $\phi : M \to G_{n,k}$ gibt, sodass $B = \phi^*\theta$.
Die $G_{n,k}$ sind wegen dieser Eigenschaft die klassifizierenden Räume für Vektorbündel.

Aufgabe 23 **2 Punkt**
Auf $\theta \to G_{n,k}$ gibt es analog zu Aufgabe 12 eine kovariante Ableitung ∇. Zeigen oder widerlegen Sie: Zu jeder kovarianten Ableitung D auf B gibt es eine kovariante Ableitung ∇ auf θ, sodass $D = \phi^*\nabla$.

Aufgabe 24 **2 Punkte**
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es ist klar, dass $TU = U \times \mathbb{R}^n$. Es sei auf U die kovariante Standardableitung ∇ definiert durch:

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} \partial_X Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Zeigen Sie, dass man genau die selbe kovariante Ableitung erhält, wenn man statt $x = (x_1, ..., x_n)^t$ andere affine Koordinaten $y = (y_1, ..., y_n)^t$ benutzt, wenn also $y = Ax + s$, für eine invertierbare Matrix A und einen beliebigen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$.
Diese kovariante Ableitung ∇ heißt daher auch der affine Zusammenhang auf U.