Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Differentialgeometrie I Sommer 2013

Abgabe 12.06.2013

Aufgabe 28 **1 Punkt**

Es sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to M$ eine Geodäte. Zeigen Sie, dass in lokalen Koordinaten $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gilt:

$$\frac{d^2 c_k}{(dt)^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} = 0 \qquad (*)$$

für alle $1 \leq k \leq n$, wobei c_k der x_k-Anteil von c ist. Dabei sind die $\Gamma^k_{i,j}$ die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ von g in den Koordinten x, definiert durch: $\nabla_{\partial x_i} \partial x_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \partial x_k$. D.h. mit der Zusammenhangs-1-Form A von ∇ ist $\Gamma^k_{i,j} = A^k_j(\partial x_i)$.

Aufgabe 29

Es sei $t \mapsto (r(t), h(t))$ eine reguläre Kurve in $\mathbb{R}^2$, d.h. $(r'(t), h'(t)) \neq (0, 0)$ für alle t. Die Dreh- oder Roatationsfläche S dieser Kurve ist das Bild $S = imf$ der folgenden Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^{\not\models} \to \mathbb{R}^3, f(t, \phi) = (r(t)\cos(\phi), r(t)\sin(\phi), h(t)).$$

Für passende Einschränkungen des Definitionsbereiches liefert f Koordinaten von S. Ist die erzeugende Kurve ein Homöomorphismus auf ihr Bild, so lässt sich leicht zeigen, dass S eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Die Standardmetrik des $\mathbb{R}^3$ induziert auf S eine Riemannsche Metrik. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhangs bzgl. t und ϕ, d.h. zeigen Sie:

$$\Gamma^t_{t,t} = \frac{r'' \cdot r' + h'' \cdot h'}{(r')^2 + (h')^2} \qquad \Gamma^t_{t,\phi} = \Gamma^t_{\phi,t} = 0 \qquad \Gamma^t_{\phi,\phi} = -\frac{r \cdot r'}{(r')^2 + (h')^2}$$

$$\Gamma^\phi_{t,t} = 0 \qquad \Gamma^\phi_{\phi,t} = \Gamma^\phi_{t,\phi} = \frac{r \cdot r'}{r^2} \qquad \Gamma^\phi_{\phi,\phi} = 0.$$

Aufgabe 30 **2 Punkte**

Bestimmen Sie die Geodäten einer Rotationsfläche S, d.h. bestimmen Sie Lösungen der Gleichung $(*)$ aus Aufgabe 28. Zeigen Sie insbesondere, dass die Kurven mit $\phi = konst., t = t(s)$ Geodäten sind, wenn man annimmt, dass sie nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Kurven $t = konst., \phi = \phi(s)$ Geodäten sind.
Bemerkung: Die Kurven mit $\phi = konst.$ sind die Meridiane und die mit $t = konst.$ die Breitenkreise von S.