Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Elementargeometrie SS 2015

Abgabe: 22.06.2015

Aufgabe 1
Es gelten die Axiome der euklidischen Geometrie. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck $\Delta(A, B, C)$, d.h. $AB \simeq AC \simeq BC$. Sei nun w_B die Winkelhalbierende im Winkel $\sphericalangle ABC$. Zeigen sie, dass w_B den Umkreis von $\Delta(A, B, C)$ in einem Punkt D schneidet (Hinweis: schauen sie sich hierfür nochmals die Konstruktion des Umkreis auf der Rückseite von Aufgabenblatt 6 an.)

Sei nun t_A die Tangente am Umkreis im Punkt A. Zeigen sie, dass sich t_A und w_B in einem Punkt E schneiden, und dass das Dreieck $\Delta(A, B, E)$ gleichschenklig ist.

Aufgabe 2
Es gelten die Axiome der euklidischen Geometrie. Zeigen sie, dass die folgenden Punktmengen einen Kreis beschreiben. Nutzen sie dabei konkrete Konstruktionen bzw. eine Geometriesoftware um sich zunächst ein Bild von der Situation zu machen.

a) Gegeben seien Punkte A und B. Betrachten sie alle möglichen Geraden g_B durch den Punkt B und die Fußpunkte der Lote von A auf g_B. Beschreiben sie die Menge der Fußpunkte.

b) Gegeben sei ein Kreis k und ein Punkt A im inneren des Kreises der ungleich dem Mittelpunkt ist. Betrachten sie nun alle Sekanten s_A durch A und betrachten sie die Mittelpunkte von s_A zwischen den Schnittpunkten mit dem Kreis. Beschreiben sie die Menge der Mittelpunkte.

Aufgabe 3
Es gelten die Axiome der euklidischen Geometrie. Gegeben sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und die Winkelhalbierenden w_A, w_B, w_C in den entsprechenden Punkten. Sei nun p_A (bzw. p_B, p_C) die Gerade die senkrecht zu w_A (bzw. w_B, w_C) im Punkt A (bzw. B, C) steht. Beweisen sie, dass jeweils 2 der Geraden z.B. p_A, p_B die Winkelhalbierende des übrigen Punktes (also im angegebenen Beispiel w_C) in einem Punkt schneiden. (Hinweis: Untersuchen sie wie sich die Geraden p_A, p_B, p_C gegenüber den Außenwinkeln des Dreiecks verhalten. Wie teilen sie diese Außenwinkel? Benutzen sie nun eine Beweisidee ähnlich zu der in Aufgabe 3 auf Blatt 6 um die Behauptung zu zeigen.)

Bezeichne nun:

$$\begin{aligned} A' &:= p_B \cap p_C \cap w_A \\ B' &:= p_A \cap p_C \cap w_B \\ C' &:= p_A \cap p_B \cap w_C. \end{aligned}$$

Fälle nun das Lot $l_{A'}$ von A' auf $G(B, C)$ und betrachte den Kreis $k_{A'}$ mit Mittelpunkt A' und Radius $l_{A'}$. Beweisen sie: der Kreis $k_{A'}$ schneidet die Geraden $G(A, C)$ und $G(A, B)$ jeweils tangential (Hinweis: Untersuchen sie die Lote von A' auf die entsprechenden Geraden).
Bemerkung: Der konstruierte Kreis wird *Ankreis* des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ an der Seite BC genannt.

Bitte wenden!

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden:

- Gegeben sei ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$ von dem nur folgende Größen bekannt sind: Der Winkel $\sphericalangle BAC$, die Länge der Seitenhalbierenden s_A von A auf BC und der Radius des Ankreis an BC (siehe Aufgabe 3). Benutzen sie die in Aufgabe 3 bewiesenen Eigenschaften des Ankreis um zu zeigen, das dass Dreieck $\Delta(A,B,C)$ durch diese Größen eindeutig bestimmt ist. Mit anderen Worten: Beweisen sie den Kongruenzsatz (Winkel, Seitenhalbierende, Ankreisradius).
- Gegeben sei ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$. Betrachten sie die Geraden die parallel zu den Dreiecksseiten durch den jeweils gegenüberliegenden Punkt verlaufen. Diese Geraden bilden ein Dreieck $\Delta(A'B'C')$. Zeigen sie, dass die Höhen des Dreieck $\Delta(A,B,C)$ den Mittelsenkrechten des Dreiecks $\Delta(A',B',C')$ entsprechen. Schlussfolgern sie nun, dass die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden. (Hinweis: Betrachten sie die Rückseite von Blatt 6.)
- Gegeben seien zwei Kreise die sich in den Punkten A und B schneiden. Sei weiter eine beliebige Sekante durch A gegeben die die Kreise in den Punkten C und D schneidet. Beweisen sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ unabhängig von der Wahl der Sekante ist.
- Gegeben seien 2 Kreise die sich in A und B schneiden. Es seien zwei Durchmesser AC und AC' der beiden Kreise gegeben. Beweisen sie, dass $B \in CC'$.