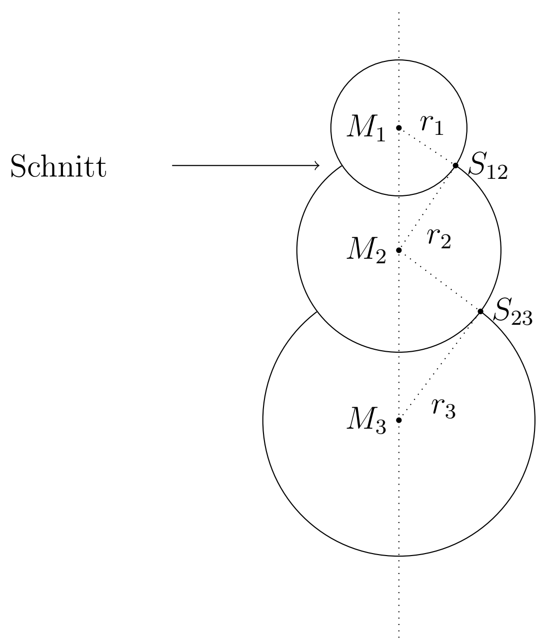
Autor: Luise Fehlinger, Robert Jablko
Projekt: ZE-AP1
Aufgabentitel: Schneemänner aus Glas

0.1 Lösung

3

Wir betrachten bei allen Überlegungen einen Schnitt durch die Mittelpunkte der Kugeln.



Cornelius Wir zeigen, dass diese Aussage äquivalent zur Aussage von Jolanda ist. Wenn wir das gezeigt haben, wissen wir, dass beide Aussagen richtig sind, sonst gäbe es ja mindestens zwei falsche Aussagen. Es hat sich aber genau ein Wichtel geirrt.

Wir betrachten das Dreieck mit den Ecken M_1 (Mittelpunkt der kleinen Glaskugel), M_2 (Mittelpunkt der mittleren Glaskugel) und S_{12} (ein Schnittpunkt von kleiner und mittlerer Glaskugel). $\overline{M_1S_{12}}$ ist ein Radius der kleinen Glaskugel und $\overline{M_2S_{12}}$ ist ein Radius der mittleren Glaskugel. Diese beiden stehen, wenn die Aussage von Cornelius korrekt ist, senkrecht aufeinander. Das ist laut Satz des Thales und seiner Umkehrung aber äquivalent dazu, dass der Schnittpunkt S_{12} auf dem Thaleskreis um $\overline{M_1M_2}$ in der betrachteten Schnittfläche liegt. Das wiederum ist äquivalent dazu, dass S_{12} auf der Kugel mit Durchmesser $\overline{M_1M_2}$ liegt.

Damit sind also beide Aussagen äquivalent und folglich richtig.

Bemerkung: Kugeln, die bei Inversion in sich selbst übergehen, stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: Es sei K_1 der Kreis der kleinen Kugel in unserer betrachteten Schnittebene und K_2 der der mittleren Kugel. Es sei $P \in K_1$ ein beliebiger Punkt auf der kleinen Kugel. Sei $P' = I_{K_2}(P)$ der Spiegelpunkt von P an der mittleren Kugel. Dann gilt nach der Definition der Nordpolspiegelung: $|\overline{M_2S_{12}}|^2 = |\overline{M_2P'}| \cdot |\overline{M_2P}|$.

$\overline{M_2S_{12}}$ ist ein Radius der mittleren Kugel. Wenn die kleine und die mittlere Kugel sich im rechten Winkel schneiden, dann ist M_2S_{12} gleichzeitig eine Tangente an die kleine Kugel. Weiterhin ist M_2P eine Sekante durch die kleine Kugel und P' liegt auf dieser Sekante. Nach dem Tangenten-Sekanten-Satz an einem Kreis gilt $|\overline{M_2S_{12}}|^2 = |\overline{M_2\widetilde{P}}| \cdot |\overline{M_2P}|$, wobei $\widetilde{P}$ der zweite Schnittpunkt der Sekante M_2P mit K_1 ist. Damit stimmen aber P' und $\widetilde{P}$ überein, da beide diese Gleichung erfüllen und auf dem Strahl von M_2 durch P liegen. Also liegt P' auf K_1. D.h., wenn sich zwei Kugeln K_1, K_2 im rechten Winkel schneiden, dann gilt $I_{K_2}(K1) \subset K1$ und $I_{K_1}(K2) \subset K2$.

Umgekehrt gilt auch, wenn zwei Kugeln bei Inversion aneinander auf sich selbst abgebildet werden, schneiden sie sich im rechten Winkel. Dazu betrachten wir die Geraden M_1S_{12} und M_1M_2. Die Gerade durch die Kugelmittelpunkte schneide K_2 in den Punkten P und P', wobei P dichter an M_1 liege als P'. Da $I_{K_1}(K_2) = K_2$ gilt, gilt insbesondere $I_{K_1}(P) = P'$ und damit $r_1^2 = \underbrace{|\overline{M_1P}|}_{=|\overline{M_1M_2}|-r_2} \cdot \underbrace{|\overline{M_1P'}|}_{=|\overline{M_1M_2}|+r_2} = |\overline{M_1M_2}|^2 - r_2^2$.

Mit der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass M_1S_{12} und M_2S_{12} senkrecht aufeinander stehen.

Jolanda Es wurde gerade gezeigt, dass diese Aussage richtig ist.

Otis Wir wissen schon, dass die Aussage von Cornelius korrekt ist. Damit sind die Dreiecke $\Delta M_1 S_{12} M_2$ und $\Delta M_2 S_{23} M_3$, wobei M_3 der Mittelpunkt der großen Glaskugel und S_{23} ein Schnittpunkt von mittlerer und großer Glaskugel ist, rechtwinklig und wir können den Satz des Pythagoras anwenden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{M_1M_3}| &= |\overline{M_1M_2}| + |\overline{M_2M_3}| \\ &\overset{S.d.P.}{=} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2} \\ &\neq \sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2}. \end{aligned}$$

Denn sonst wäre

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2} &= \sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2} \\ \Longrightarrow \quad r_1^2 + r_2^2 + 2\sqrt{r_2^2 + r_3^2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + r_2^2 + r_3^2 &= r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2 \\ \Longrightarrow \quad 2\sqrt{r_2^2 + r_3^2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist aber eine falsche Aussage, da alle Radien größer als null sind. Sonst wäre der Schneemann ja nur ein Punkt.

Wichtel Otis hat sich geirrt.

Milena Die Nordpol-Spiegelung ist eine Inversion am Kreis. Wird zweimal hintereinander an derselben Kugel invertiert, ist das Spiegelbild des Spiegelbildes mit dem Original identisch. Bei Inversion der mittleren Glaskugel an der kleinen, sind die Schnittpunkte Fixpunkte. Damit muss das Bild der mittleren Glaskugel im Idealfall auf der mittleren Kugel liegen. Nur dass der Kugelteil, der vorher außerhalb der kleinen Kugel war, jetzt im Inneren liegt (also dort, wo vorher der ausgeschnittene Teil war). Die große Kugel wird jedoch auch an der kleinen invertiert. Sie hat Schnittpunkte mit der mittleren Kugel gemeinsam, unterscheidet sich aber in allen anderen Punkten. Das muss also auch für die Bilder gelten. D.h., das Bild der großen Glaskugel hat Schnittpunkte mit der mittleren Glaskugel, stimmt aber nicht mit ihr überein. Das Bild kann aber auch nicht mit der kleinen Glaskugel übereinstimmen, weil bei Inversion an der kleinen Glaskugel nur die Punkte der kleinen Glaskugel auf diese abgebildet werden. Also liegt auf jeden Fall das Bild der großen Glaskugel bei Inversion an der kleinen nicht komplett auf einer Glaskugel.

Analog gilt das für das Bild der kleinen Glaskugel bei Inversion an der großen Glaskugel.

Diese Aussage ist also korrekt.

Julian Wir wissen bereits, dass das Bild der kleinen Glaskugel bei Inversion an der großen (Bezeichnung: B_{13}) und das Bild der großen bei Inversion an der kleinen (Bezeichnung: B_{31}) nicht komplett auf den Glaskugeln liegen. B_{13} liegt im Innern der großen Glaskugel. Damit muss das Bild von B_{13} bei Inversion an der kleinen Glaskugel im Innern von B_{31} liegen, liegt also auch nicht komplett auf einer Glaskugel. Analog liegt das Bild von B_{31} bei Inversion an der großen Glaskugel im Innern von B_{13} also auch nicht komplett auf einer Glaskugel.

Diese Aussage ist korrekt.

Lotta Wenn zwei Kugeln sich senkrecht schneiden, geht eine bei Inversion an der anderen in sich selbst über und umgekehrt. Wenn wir zweimal dieselbe Inversion hintereinander ausführen, ist das zweite Bild mit dem Original identisch. Inversionen am Kreis erhalten die Winkel.

Also werden die Glaskugeln wie folgt abgebildet. Dabei ist K_1, K_2 bzw. K_3 die kleine, mittlere bzw. große Kugel und I_{K_1}, I_{K_2} bzw. I_{K_3} die Inversion an der kleinen, mittleren bzw. großen Kugel.

$$
\begin{array}{lcll}
K_1 & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_1 & \text{weitere Bilder s.u.} \\
K_1 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_1 & \text{weitere Bilder s.u.} \\
K_1 & \xrightarrow{I_{K_3}} & B_{13} & \text{und } B_{13} \text{ schneidet } K_2 \text{ senkrecht} \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_2 & \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_2 & \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_2 & \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_1}} & B_{31} & \text{und } B_{31} \text{ schneidet } K_2 \text{ senkrecht} \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_3 & \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_3 & \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_1}} & I_{K_1}(B_{13}) & \text{im Innern von } B_{31} \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_2}} & B_{13} & \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_1 & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_3 & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_2}} & B_{32} & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_3}} & I_{K_3}(B_{31}) & \text{im Innern von } B_{13}
\end{array}
$$

Diese Liste beinhaltet alle Spiegelbilder und die Spiegelbilder der Spiegelbilder. D.h., wenn K_1 und K_2 sich senkrecht schneiden und K_2 und K_3 sich ebenfalls senkrecht schneiden, liegen genau vier Bilder nicht komplett auf den Glaskugeln.

Die Aussage ist also richtig (und könnte sogar noch verschärft werden).

Mattie Der Durchmesser des Bohrers muss das Doppelte der Höhe h von Dreieck $\Delta M_1 S_{12} M_2$ sein. Nach dem Höhensatz (wobei p und q die Hypothenusenabschnitte sind) gilt: $h^2 = p \cdot q$. Mit dem Kathetensatz und dem Satz des Pythagoras berechnen wir $p \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_1^2$ und $q \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_2^2$. Damit erhalten wir für die Höhe: $2h = 2\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}}$.

Die Aussage ist also richtig.

Noam Wir haben schon den Durchmesser des Schnittkreises als $2\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}}$ berechnet. Damit erhalten wir für das Quadrat des Radius des Schnittkreises: $\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}$. Das Reziproke davon ist $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 \cdot r_2^2} = \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2}$. Die Aussage ist also korrekt.

Ives Der Schnittwinkel ist gleich dem Winkel zwischen der Höhe von S_{12} auf $\overline{M_1 M_2}$ (mit Fußpunkt H) und der Geraden durch M_1 und S_{12}. Die Dreiecke $\Delta M_1 S_{12} H$ und $\Delta M_1 M_2 S_{12}$ stimmen in den rechten Winkeln und dem Winkel in M_1 überein, sind also ähnlich. Der Schnittwinkel ist also kongruent zum Winkel in M_2 von Dreieck $\Delta M_1 S_{12} M_2$. Damit ist der Winkel gleich $\arctan \frac{r_1}{r_2}$.

Die Aussage ist also korrekt.

Alva Der Abstand a zwischen Führungsschiene und Sägeblatt ist gerade der Radius des mittleren Kreises minus die Länge des Hypotenusenabschnittes q, der komplett innerhalb der mittleren Kugel liegt. Zur Berechnung nutzen wir den Kathetensatz und den Satz des Pythagoras: $q = \frac{r_2^2}{c} = \frac{r_2^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ und formen noch etwas um:

$$\begin{aligned} a &= r_2 - q \\ &= r_2 - \frac{r_2^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \\ &= r_2 \left(1 - \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right) \\ &= r_2 \left(\frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2} - r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right) \\ &= r_2 \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1^2 + r_2^2} \end{aligned}$$

Damit ist auch diese Antwort richtig.