Aufgabe 1

a) Leiten Sie die exakten Werte von $\sin(\pi/10)$ und $\cos(\pi/10)$ her.

b) Geben Sie Formeln von $\sin 2x$ und $\cos 2x$ in Termen von $\cos x$ und $\sin x$ an

c) Bestimmen sie $\cos x$ als Ausdruck von $\cos 2x$.

d) Geben sie Formeln von $\cos(\pi/20)$ und $\sin(\pi/20)$ an.

Lösung. Zu Teil a). Sei $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ der goldene Schnitt und ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = 1$ und $|AC| = |AB| = \varphi$. Sei $W_a \in \overline{BC}$, so dass $|\overline{CW}_a| = 1$. Es gilt

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \varphi = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BW}_a|}\,.$$

Betrachte die Dreiecke ΔABC und ΔBW_aA. Sie haben einen gemeinsamen Innenwinkel und wir habe gerade gezeigt, dass die beiden angrenzenden Seiten im gleichen Verhältnis stehen. Also sind sie ähnlich nach dem Ähnlichkeitssatz wsw. Wir folgern daraus, dass auch ΔBW_aA ein gleichschenkliges Dreieck ist und $|\overline{AW}_a| = |\overline{AB}| = |\overline{CW}_a|$. Die Dreiecke ΔACW_a und ΔABW_a sind also gleichschenklig. Nach Basiswinkelsatz $\alpha := \measuredangle CAW_a = \measuredangle ACW_a = \measuredangle BAW_a$. Nach Innenwinkelsatz $5\alpha = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \pi$, also $\alpha = \pi/5$. Set P der Lotfußpunkt von C auf AB. Das Dreieck ΔCPA ist rechtwinklig und hat einen Innenwinkel von $\pi/10$ bei C. Wir rechnen

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1/2}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,.$$

Zu Teil b). Nach Vorlesung

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin 2x = \sin(x+x) = 2\cos x \sin x\,.$$

Zu Teil c). Mit trigonometrischem Pythagoras $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Damit

$$\frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \cos^2 x\,.$$

Zu Teil d). Wir erhalten mit $x = \pi/20$ und den obigen Formeln

$$\cos^2 \frac{\pi}{20} = \frac{1}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\,.$$

Sowie

$$\sin^2 \frac{\pi}{20} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,.$$

Also

$$\cos \frac{\pi}{20} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4}\,, \qquad \sin \frac{\pi}{20} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\,.$$

□

Aufgabe 2 Sei ΔABC ein Dreieck mit Standardbezeichnung sodass $b = 1$, $c = 2$ und $\measuredangle A = \pi/6$. Bestimme a, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$.

Lösung. Sei D der Lotfußpunkt von C auf AB. Nach Definition von Sinus und Kosinus

$$|\overline{CD}| = b\sin(\pi/6) = 1/2\,, \quad |\overline{AD}| = b\cos(\pi/6) = 1/2\sqrt{3}\,.$$

Nach Pythagoras

$$a = \sqrt{|\overline{CD}|^2 + |\overline{BD}|^2} = \sqrt{1/4 + (2 - 1/2\sqrt{3})^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\,.$$

Der Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,.$$

Einsetzen und Umformen

$$\sin\beta = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{5 - 2\sqrt{3}}\,, \quad \sin\gamma = 2\sin\beta = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{5 - 2\sqrt{3}}\,.$$

□

Aufgabe 3 Es seien ΔABC ein Dreieck in Standardbezeichnung mit Flächeninhalt F, Innenkreisradius r sowie den Umkreisradius R. Bestimmen Sie r, R und rR als Ausdruck von a, b, c und F.

Lösung. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises und $C' \neq B$ der zweite Schnittpunkt der Gerade BM mit dem Umkreis. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\gamma := |\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ACB|$. Nach Satz des Thales ist $|\measuredangle BAC'| = \pi/2$. Die Definition des Sinus liefert

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}\,.$$

Sei P der Lotfußpunkt von B auf AC und $h_b = |\overline{BP}|$. Es gilt

$$F = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{abc}{4R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{abc}{4F}\,.$$

Sei nun N der Mittelpunkt des Innenkreises und E, F und G die Lotfußpunkte von N auf die Seiten des Dreiecks (siehe Skizze). Wir zerlegen das gesamte Dreieck ΔABC in die drei Dreiecke ΔBNC, ΔCNA und ΔANB. Die Höhen der kleinen Dreiecke ist jeweils r und die Grundseiten a,b bzw. c. Damit

$$F = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{r}{2}(a+b+c) \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{2F}{a+b+c}\,.$$

Damit sehen wir

$$rR = \frac{1}{2}\frac{abc}{a+b+c}\,.$$

□

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte M_a, M_b der Seiten BC und AC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ sowie die Mittelpunkte E_a, E_b der Höhenabschnitte AP_H sowie BP_H ein Rechteck bilden.
(b) Analoges gilt für die anderen zwei Paare von Seiten. Folgern Sie daraus, dass M_a, M_b, M_c zusammen mit E_a, E_b, E_c auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Schnittpunkt der Strecken M_aE_a, M_bE_b und M_cE_c sein muss.
(c) Zeigen Sie schließlich, dass die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c ebenfalls auf diesem Kreis liegen müssen.
Hinweis: Hier gibt es viele Mittelpunkte von Strecken und parallele oder senkrechte Geraden. Der Satz des Thales ist ebenfalls hilfreich.

Lösung. (siehe neunpunktekreis2.ggb).

Die Aufgabe lässt sich nicht ganz so lösen, wie vorgeschlagen.

E_a ist Mittelpunkt von P_hA, E_b Mittelpunkt von P_hB. Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass E_aE_b parrallel zu AB ist (Strahlen in P_h). M_b ist Mittelpunkt von AC und M_A ist Mittelpunkt von BC. Dann folgt aus demselben Grund, dass M_aM_b parallel zu AB und somit auch parallel zu E_aE_b ist (Strahlen in C). Mit der Strahlensatzfigur in A, folgt, dass E_aM_b parallel zur Höhe CH_c und mit Strahlensatzfigur in B, dass E_bM_a ebbenfalls parallel zu CH_c ist. Da die Höhe senkrecht auf AB steht, steht sie nach Stufenwinkelsatz an Parallelen auch senkrecht auf E_aE_b und M_aM_b und aus demselben Grund stehen dann E_aE_b und M_aM_b senkrecht auf E_aM_b und E_bM_a. Also ist $M_aM_bE_aE_b$ ein Rechteck. Die Diagonalen in einem Rechteck sind gleichlang und halbieren sich. Damit enthält der Kreis dessen Mittelpunkt der Schnittpunnkt der Diagonalen ist mit Radius gleich der halben Länge der Diagonalen alle 4 Punkte. H_a und H_b liegen ebenfalls auf diesem Kreis: Falls $H_a \neq M_a$, so ist $\measuredangle/M_aH_aE_a$ ein rechter Winkel. Somit folgt die Behauptung für H_a aus der Umkehrung des Thalessatzes. Analog folgt die Behauptung für H_b.

Ist das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gleichseitig folgt die Behauptung über den Neunpunktekreis leicht: der Schwerpunkt S hat denselben Abstand von Ma, M_b und M_c, nämlich $s/3$, wobei s die (gleiche) Länge der Seitenhalbierenden ist. Damit ist S der Mittelpunkt des Umkreises dieser drei Punkte. Dieser halbiert die Segmente SA, SB, SC, die außerdem auch die Höhen in deisem Dreieck sind und enthält also auch E_a, E_b, E_c.

Ist das Dreieck nicht gleichseitig, sei o.B.d.A. $AC \neq AB$. Dann ist $M_a \neq H_a$ (Warum?). $E_a, M_a, H_a, E_b, M_b, H_b$ liegen nun auf einem Kreis K und $E_a, M_a, H_a, E_c, M_c, H_c$ liegen auf einem Kreis L. Dies muss aber der Umkreis von $\Delta(M_a, H_a, E_a)$ sein und der ist eindeutig für "echte" Dreiecke. Also stimmen die beiden Kreise überein: $K = L$. Somit liegen alle neun Punkte (von denen eventuell einige übereinstimmen) auf einem Kreis.

□