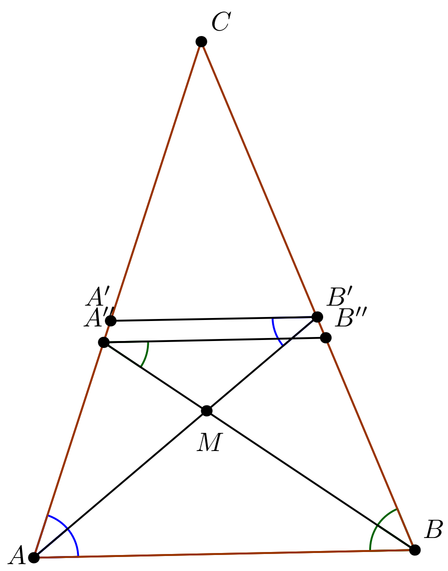
Aufgabe: Sei ΔABC ein Dreieck. Sei B' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\measuredangle BAC$ mit der Seite $\overline{BC}$ sowie A'' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\measuredangle ABC$ mit der Seite $\overline{AC}$ (siehe Skizze). Zeige: Angenommen $|AB'| = |A''B|$, dann ist ΔABC gleichschenklig.

Lösung: Sei A' der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch B' und B'' der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch A''. Es reicht zu zeigen, dass $|A'B'| = |A''B''|$. Denn die (gleichschenkligen) Dreiecke $\Delta AB'A'$ und $\Delta BA''B''$ sind in diesem Fall kongruent (nach SSS) und somit $\beta := |\measuredangle A''BA| = \alpha := |\measuredangle B'AB|$, also ΔABC gleichschenklig nach Umkehrung vom Basiswinkelsatz. Sei nun mit Widerspruch $|A'B'| < |A''B''|$. Die gleichschenkligen Dreiecken $\Delta AB'A'$ und $\Delta BA''B''$ haben die gleiche Basislänge nach Vorraussetzung aber das erste Dreieck einen kürzeren Schenkel, also auch kleineren Basiswinkel, d.h. $\alpha < \beta$. Das "open mouth theorem" für die Dreiecke $\Delta ABA''$ und $\Delta BAB'$ besagt, dass damit $|B'B| < |A''A|$. Also $|A'B'| = |AA'| > |AA''| > |BB'| > |BB''| = |A''B''|$ im Widerspruch zur Annahme. Wenn $|A'B'| > |A''B''|$ widerhole das gleiche Argument mit Rollen von α und β vertauscht.



$\square$