

Aufgabe 2)

$$\{ \{ (x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R} \} \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$\{ \{ (c, y) \mid y \in \mathbb{R} \} \mid c \in \mathbb{R} \} \text{ sind die Geraden, } \mathcal{E} = \mathbb{R}^2$$

a) Sind die Inzidenzaxiome erfüllt?

Zeige zunächst, dass

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2, A \neq B, \exists! g \in \mathcal{G}: A, B \in g.$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ beliebig mit $A \neq B$ und

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2).$$

Fall 1: $x_1 = x_2$

Wenn $x_1 = x_2$, dann liegen A und B

auf einer zur y-Achse parallelen

Geraden. Bleibt zu zeigen, dass A und

B nicht gleichzeitig auch auf einer

Parabel der Form $\{ \{ (x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R} \} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

liegen. Eine Parabel dieser Form sowie

eine zur y-Achse parallele euklidische

Gerade schneiden sich in genau einem

Punkt, sodass A und B nicht

gleichzeitig auf einer Parabel aus (*)

liegen können.

Falls 2: $x_1 \neq x_2$

Dann liegen A und B nicht auf einer

zur y-Achse parallelen Geraden. Bleibt

zu zeigen, dass A und B auf

genau einer Parabel der Form

$\{ \{ (x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R} \} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ liegen.

Suche eindeutig bestimmte Lösungen

a, b des Gleichungssystems

$$y_1 = (x_1 - c)^2 + b \quad (1)$$

$$y_2 = (x_2 - c)^2 + b \quad (2)$$

also

$$y_1 - x_1^2 = c^2 - 2x_1c + b \quad (1)$$

$$y_2 - x_2^2 = c^2 - 2x_2c + b \quad (2)$$

$$(1) - (2): y_1 - y_2 - x_1^2 + x_2^2 = 2x_2c - 2x_1c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{y_1 - y_2 - x_1^2 + x_2^2}{2x_2 - 2x_1} \quad (*)$$

$\neq 0, \text{ da } x_1 \neq x_2$

Damit ist c eindeutig bestimmt durch $(*)$.

Damit ist auch b eindeutig bestimmt durch

$$b = y_1 - (x_1 - (*))^2 = y_2 - (x_2 - (*))^2,$$

sodass A und B auf genau einer Parabel der definierten Form liegen. Insgesamt ist also Inzidenzaxiom (1) erfüllt.

Da mit $\mathbb{R}^2$ eine unendliche Ebene definiert wurde, enthält jede Gerade mindestens zwei Punkte. ✓

Die Punkte $(0, 1)$, $(0, 2)$ liegen auf einer Geraden (zur y -Achse parallel), $(1, 0)$ liegt nicht auf dieser Geraden, sodass mindestens drei Punkte existieren, die nicht auf einer Geraden liegen. Also ist auch Inzidenzaxiom (2) erfüllt. ✓

ii) alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser

Sei $g \in \mathcal{G}$ und $A \in \mathbb{R}^2$ beliebig mit $A \notin g$ und $A = (x_1, y_1)$.

Fall 1: $g \in \{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{c \in \mathbb{R}\}$.

Dann ist für $A = (x_1, y_1) \notin g$ die Gerade $h = \{(c, y_1) \mid c \in \mathbb{R}\}$ parallel zu g , da $g \cap h = \emptyset$ und $A \in h$.

Es existiert keine Gerade

$$f \in \{(x, (x-c)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid c, b \in \mathbb{R}\},$$

sodass $f \parallel g$, da Funktionen der Form $f(x) = (x-c)^2 + b$ surjektiv auf dem Wertebereich $[b, \infty)$ sind. (*)

Fall 2: $g \in \{(x, (x-c)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid c, b \in \mathbb{R}\}$.

Wegen (*) existiert keine Parallele

$$k \in \{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{c \in \mathbb{R}\} \text{ mit } k \parallel g.$$

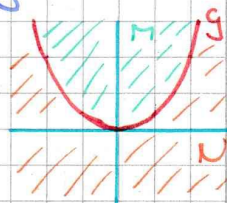
Fall 2.1: $A \in M$.

Dann gilt für die Parabel

$$i(x) = (x-c)^2 + b + |y_1 - ((x-c)^2 + b)|$$

dass $i \parallel g$.

sehr gut



Fall 2.2: $A \in N$.

Dann gilt für die Parabel

$$j(x) = (x-c)^2 + b - |y_1 - ((x-c)^2 + b)|,$$

dass $j \parallel g$.



iii) Erfüllt diese Geometrie das Trennungsaxiom?

~~Nein, diese Geometrie erfüllt das Trennungsaxiom nicht.~~

~~Betrachte die Gerade~~

$$g = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

~~so wie die Menge~~

$$M = \{(x, y) \mid y < x^2 \text{ und } x, y \in \mathbb{R}\}$$

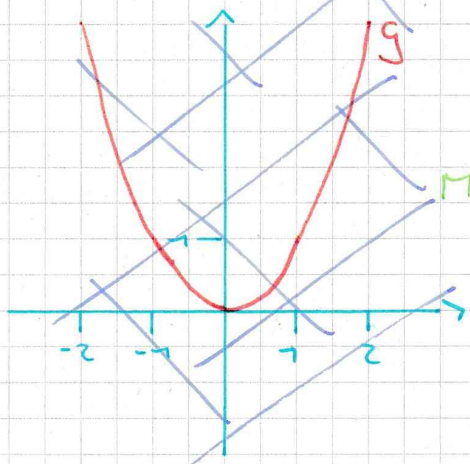
~~Würde die Geometrie das Trennungsaxiom erfüllen, wäre M eine Seite von G , also auch konvex.~~

~~Zum Beispiel die Punkte~~

~~$A = (-2, 2)$ und $B = (2, 2)$ liegen in M ,~~

~~aber $AB \notin M$, sodass M nach Definition 4 nicht konvex ist.~~

~~Also erfüllt die Geometrie das Trennungsaxiom nicht.~~



Ja, diese Geometrie erfüllt das Trennungsaxiom.

Begründung: Sei $g \in \mathcal{G}$ beliebig.

- Fall 1: $g \in \{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \mid c \in \mathbb{R}\}$

Dann ist

$$E \setminus g = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x < c\} =: \mathcal{H}_+ \\ \cup \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x > c\} =: \mathcal{H}_-$$

Diese Mengen sind offensichtlich disjunkt.

Seien $A, B \in \mathcal{H}_+$ beliebig.

Fall 1.1: A, B liegen auf einer Parallelen zur y -Achse. Dann offensichtlich $AB \subset \mathcal{H}_+$.

Fall 1.2: A, B liegen auf einer Parabel der Form

$$\{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann offensichtlich $AB \subset \mathcal{H}_+$. $\checkmark$ (Analog für $A, B \in \mathcal{H}_-$)
 $\Rightarrow \mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ sind konvex.

- Fall 2: $g \in \{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Dann ist

$$E \setminus g = \{(x, y) \mid y < (x-a)^2 + b \wedge x, y \in \mathbb{R}\} =: \tilde{\mathcal{H}}_+ \\ \cup \{(x, y) \mid y > (x-a)^2 + b \wedge x, y \in \mathbb{R}\} =: \tilde{\mathcal{H}}_-$$

Diese Mengen sind offensichtlich disjunkt. $\checkmark$

Seien $A, B \in \tilde{\mathcal{H}}_+$ beliebig.

Fall 2.1: A, B liegen auf einer Parallelen zur y -Achse. Dann offensichtlich $AB \subset \tilde{\mathcal{H}}_+$. $\checkmark$

Fall 2.2: A, B liegen auf einer Parabel der Form $\{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Da diese Parabeln nur verschoben, aber nicht gestreckt, gestaucht oder gespiegelt werden, ist offensichtlich $AB \subset \tilde{\mathcal{H}}_+$. (Analog für $A, B \in \tilde{\mathcal{H}}_-$)
 $\Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_+$ und $\tilde{\mathcal{H}}_-$ sind konvex. $\checkmark$

10
sehr gut!