Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Geometrie WS 2017/18

Lösung einer Aufgabe der Rückseite

Aufgabe: Beweisen Sie, dass die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ sich im Punkt S schneiden, der durch $S := (A + B + C)/3$ gegeben ist. In welchem Verhältnis teilt S die Seitenhalbierenden?

Lösung: Seien $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Es genügt , die Behauptung für eine Seitenhalbierende zu zeigen. Sie folgt dann formal durch Vertauschung der Indizes für die beiden anderen. Der Mittelpunkt der Seite AB ist gegeben durch

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

Der Punkt S liegt nun genau dann auf der Seitenhalbierende CM, wenn es ein $t \in [0, 1]$ gibt mit

$$S = tC + (1 - t)M.$$

Das sind zwei Gleichungen mit Unbekannter t:

$$(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}) = (tx_3 + (1 - t)\frac{x_1 + x_2}{2}, ty_3 + (1 - t)\frac{y_1 + y_2}{2}).$$

Umstellen der Gleichung für die erste Koordinate ergibt

$$(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2})t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

bzw.

$$\frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{2}t = \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{6}$$

Analog gilt

$$\frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{2}t = \frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{6}.$$

Daraus folgt, dass

$$S = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}M.$$

Da $C \neq M$ (Dreiecke (ohne Zusatz) sind in dieser Lehrveranstaltung nicht entartet), ist dies auch die einzige Lösung. Alternativ kann man argumentieren, dass der Fall $x_1 + x_2 = 2x_3, y_1 + y_2 = 2y_3$ ebenfalls bedeutet, dass $(x_3, y_3) = M$ ist und das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ entartet.

Also liegt tatsächlich $S \in CM$ und es gilt

$$\frac{|CS|}{|SM|} = \frac{1}{2}.$$

Da dasselbe nun auch für die beiden anderen Seitenhalbierenden gilt, folgt insbesondere, dass sich alle drei in einem Punkt, nämlich dem Schwerpunkt S schneiden.